Second problème.

Le demi-espace cartésien $x \geq 0$ est ici un milieu conducteur homogène isotrope. Il est constitué idéalement d'ions immobiles et d'électrons libres.

Ces électrons, de masse **m**, de charge électrique $-e$ et de densité **n** (par unité de volume) assurent la conduction électrique. Le milieu possède la permittivité ε_0 et la perméabilité μ_0 du vide.

Les chocs entre électrons et ions sont modélisés par une force de frottement visqueux de la forme $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$, opposée à la vitesse $\vec{v}$ des électrons. Le temps τ, dit temps de relaxation, est une caractéristique du milieu conducteur considéré.

La vitesse v est toujours très petite devant la célérité c de la lumière.

Les données numériques, dont celles relatives à l'aluminium, sont en fin d'énoncé.

A. On applique à ce milieu un champ électrique constant E_0 normal à Ox.

1. Écrire le bilan des forces appliquées à un électron. (PFD)
2. En déduire l'expression de sa vitesse $\vec{v}$, sous la forme de la somme d'un terme évanescent et d'un terme permanent dû à E_0.
3. En supposant le terme évanescent négligeable, donner, en fonction de **e**, **m**, **n** et τ, l'expression de la conductivité γ_0 du milieu.
4. ***Application numérique.*** Calculer la valeur du temps de relaxation τ dans le cas de l'aluminium. (Données en fin d'énoncé)
   Justifier que le terme évanescent dans l'expression de la vitesse v est effectivement négligeable.

B. On applique maintenant au milieu une onde électromagnétique plane de pulsation ω et de vecteur d'onde σ dont la composante de champ électrique **E** normale à **Ox** est de la forme : $E = E_0 \exp j(\omega t - \sigma x)$.

5. Donner l'expression du terme permanent de la vitesse v d'un électron.
6. En déduire, en fonction de γ_O, ω et τ, l'expression de la conductivité γ du milieu.
7. *Application numérique.* On introduit la pulsation, dite pulsation de plasma, ω_P, définie par $\omega_P^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$.
Calculer ω_P et $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ pour l'aluminium. Situer ces pulsations dans le spectre électromagnétique et donner une interprétation physique de ces grandeurs.
8. Écrire et commenter les formes limites que prend la conductivité γ du milieu pour des ondes électromagnétiques de basse fréquence ($\omega << \omega_0$), ou de haute fréquence ($\omega >> \omega_0$).
9. Écrire les équations de Maxwell $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$ dans le milieu conducteur.
10. En déduire la relation, dite relation de dispersion, liant le vecteur d'onde σ et la pulsation ω.
11. Mettre cette relation sous la forme :

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - h(\omega))$$

Exprimer $h(\omega)$ en fonction de ω_P et τ.
12. On note ici $\sigma(\omega)$ sous la forme $\sigma = \sigma' - j\sigma''$.
Donner l'expression du champ électrique de l'onde électromagnétique et donner l'interprétation physique des termes σ' et σ''.
13. On appelle profondeur de pénétration δ la distance parcourue par l'onde dans le conducteur pour que son amplitude soit divisée par e (ln e=1). Donner l'expression de $\delta(\omega)$ en fonction de σ''.
14. Exprimer , en fonction de ω_P, τ et c, la valeur limite de δ pour les basses fréquences. (On pourra reconnaître l'expression classique de la profondeur de peau : $\delta\,(\mu_0, \gamma_0, \omega)$)
15. *Application numérique.* Calculer δ dans l'aluminium pour $\omega = 10^{-4}\,\omega_0$. Situer ω dans le spectre électromagnétique.
16. Exprimer, en fonction des mêmes paramètres, la valeur limite de δ pour les hautes fréquences.
17. *Application numérique.* Calculer δ dans l'aluminium pour $\omega = 10^{+4}\,\omega_0$. Situer ω dans le spectre électromagnétique.

C. On s'intéresse ici à la puissance électromagnétique moyenne P(x) traversant une tranche de conducteur de surface S comprise entre x et x+dx. On se placera dans l'hypothèse de fréquences faibles devant ω_0.

18. Établir l'expression de $\frac{dP}{dx} = -\gamma_0 S\langle E^2\rangle$ en fonction des paramètres E_0 et δ, où $\langle E^2\rangle$ désigne la valeur quadratique moyenne de E.

19. Intégrer cette relation sur toute l'épaisseur supposée infinie du métal. Commenter le résultat.

Données numériques :

$m = 9{,}1.10^{-31}$ kg

$e = 1{,}6.10^{-19}$ C

$\varepsilon_0 = \dfrac{10^{-9}}{36.\Pi}$ F.m^{-1}

$c = 3.10^{8}$ m.s^{-1}

et pour l'aluminium :

$n = 1{,}8.10^{29}$ (électrons).m^{-3}

$\gamma_0 = 3{,}5.10^{7}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$

A1) Théorème du centre d'inertie appliqué à l'électron : $\boxed{m\frac{d\vec v}{dt} = -e\vec E_0 - \frac{m\vec v}{\tau}}$

A2) Résolvons l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec v}{dt} + \frac{\vec v}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec E_0 \qquad (\vec E_0 \text{ constant})$$

$$\boxed{\vec v = \underbrace{\vec A e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{terme évanescent}} - \underbrace{\frac{e\tau}{m}\vec E_0}_{\text{terme permanent dû à } \vec E_0}}$$ où $\vec A$ dépend des conditions initiales

A3) Hypothèse suggérée : $\vec A e^{-\frac{t}{\tau}} \ll \frac{e\tau}{m}\vec E_0$

donc $\vec v \simeq -\frac{e\tau}{m}\vec E_0$

La densité de courant est $\vec j = -ne\vec v$

soit $\vec j = \frac{ne^2\tau}{m}\vec E_0$

La loi d'Ohm : $\vec j = \gamma_0\vec E_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$

A4) $\tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2} = \frac{9,1.10^{-31}\cdot 3,5.10^{7}}{1,8.10^{29} \times 1,6^2\times 10^{-19\times 2}}$

$\underline{\tau = 6,9.10^{-15}\ s}$ très court ce qui justifie de négliger le terme évanescent transitoire.

B5) On reprend l'équation différentielle de départ mais avec un champ complexe $\vec E = \vec E_0 e^{j(\omega t - \sigma x)}$

la solution permanente est aussi complexe en $\exp(j(\omega t - \sigma x))$

On a ainsi $m\frac{d\vec v}{dt} = -e\vec E - \frac{m\vec v}{\tau}$ qui se transforme en

$jm\omega\vec v = -e\vec E - \frac{m}{\tau}\vec v$ d'où $\boxed{\vec v = \frac{-e\vec E}{jm\omega + \frac{m}{\tau}}}$

B6) $\vec j = -ne\vec v = \frac{ne^2\vec E}{jm\omega + \frac{m}{\tau}}$

$\vec j = \gamma\vec E$ $\Rightarrow$ $\boxed{\gamma = \frac{ne^2}{jm\omega + \frac{m}{\tau}} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}}$

B7) $\omega_p = \left(\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\right)^{\frac12} = \left(\frac{1,8.10^{29}\times 1,6^2\times 10^{-19\times 2}}{9,1.10^{-31}\times\frac{10^{-9}}{36\pi}}\right)^{\frac12}$

$\underline{\omega_p = 2,4.10^{16}\ s^{-1}}$

$\underline{\omega_0} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{6,9.10^{-15}} = 1,4.10^{14}\ s^{-1}$

Cela conduit à $\underline{\lambda_0} = \frac{c}{f_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi\times 3.10^8}{1,4.10^{14}} = \underline{13\ \mu m}$

$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p} = \frac{2\pi\times 3.10^8}{2,4.10^{16}} = \underline{78\ nm}$

λ_0 domaine des I.R

λ_p domaine des U.V

On remarque que si $\omega \ll \omega_0$ alors $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ càd $\omega\tau \ll 1$ et $\gamma \simeq \gamma_0$

ω_0 est donc la limite de pulsation au-dessous de laquelle le plasma réagit comme si l'onde était continu.

Du cours on sait que les ondes ne se propagent pas dans un plasma si $\omega < \omega_p$. Il y a réflexion totale.

B8) $\omega \ll \omega_0 \rightarrow \gamma \simeq \gamma_0$ comme pour le régime permanent continu ; γ ne dépend pas de ω

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \gamma \simeq -j\frac{\gamma_0}{\omega\tau}$ comme si dès le départ l'équation de mouvement était $m\frac{d\vec v}{dt} = -e\vec E_0$ càd comme s'il n'y avait plus de frottement.

B9) $\boxed{\vec{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}}$ $\boxed{\vec{rot}\,\vec B = \mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec E}{\partial t}}$

B10) Il s'agit d'ondes planes en $\vec E_0 e^{j(\omega t - \sigma x)}$ avec $\vec E_0$ constant. On peut appliquer les résultats sur les opérateurs : $\vec{rot} \rightarrow -j\vec\sigma\wedge$, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

d'où $-j\vec\sigma\wedge\vec E = -j\omega\vec B$ et $-j\vec\sigma\wedge\vec B = \mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0 j\omega\vec E$

d'où $-j\vec\sigma\wedge\left(\frac{\vec\sigma\wedge\vec E}{\omega}\right) = \mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0 j\omega\vec E$

soit $-j\frac{\vec\sigma\cdot\vec E}{\omega}\vec\sigma + j\frac{\sigma^2}{\omega}\vec E = \mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0 j\omega\vec E$

Pour une onde plane dans un milieu neutre électriquement $\mathrm{div}\,\vec E = 0$ soit $j\vec\sigma\cdot\vec E = 0$

d'où $j\frac{\sigma^2}{\omega}\vec E = \mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0 j\omega\vec E$

La loi d'Ohm : $\vec j = \gamma\vec E$ permet d'éliminer $\vec E$:

$\boxed{j\frac{\sigma^2}{\omega} = \mu_0\gamma + \mu_0\varepsilon_0 j\omega}$ relation de dispersion

B11) $\boxed{\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - j\frac{\mu_0\gamma c^2}{\omega}\right)}$

$h(\omega) = j\mu_0\frac{\gamma c^2}{\omega} = j\mu_0\frac{c^2}{\omega}\frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau} = j\mu_0 c^2\frac{ne^2\tau}{\omega\, m(1+j\omega\tau)}$

$h(\omega) = j\frac{\mu_0 c^2\varepsilon_0\omega_p^2\tau}{\omega(1+j\omega\tau)}$ $\boxed{h(\omega) = j\frac{\omega_p^2\tau}{\omega(1+j\omega\tau)}}$

B12) Avec $\sigma = \sigma' - j\sigma''$ le champ $\vec E$ s'écrit :

$\boxed{\vec E = \vec E_0 e^{j(\omega t - \sigma' x)} e^{-\sigma'' x}}$

σ' correspond à la propagation

σ'' correspond à l'atténuation de l'onde

B13) L'amplitude est $E_0 e^{-\sigma'' x}$

on souhaite que $E_0 e^{-\sigma''(x+\delta)} = E_0 e^{-\sigma'' x}\times\frac{1}{e}$

d'où $e^{\sigma''\delta} = e$ soit $\boxed{\delta = \frac{1}{\sigma''}}$

B14) $\delta = \frac{1}{\sigma''}$ où σ'' est la partie imaginaire de σ

Or $\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1-h(\omega))$

soit $\sigma = \frac{\omega}{c}(1-h(\omega))^{\frac12}$ avec $h(\omega) = j\frac{\omega_p^2\tau}{\omega(1+j\omega\tau)}$

$h(\omega) \simeq j\frac{\omega_p^2\tau}{\omega}$ quand $\omega \to 0$

C'est un terme qui tend vers l'infini

donc $1-h(\omega) \simeq -h(\omega)$

et $(1-h(\omega))^{\frac12} \simeq (-h(\omega))^{\frac12} = (-j)^{\frac12}\,\omega_p\sqrt{\frac{\tau}{\omega}}$

Comme $(-j)^{\frac12} = \pm\frac{1-j}{\sqrt2}$ cela donne :

$\sigma = \frac{\omega}{c}\frac{1-j}{\sqrt2}\,\omega_p\sqrt{\frac{\tau}{\omega}}$ pour être comme $\sigma' - j\sigma''$

d'où $\sigma'' = \frac{\omega}{c}\,\omega_p\sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} = \frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\tau\omega}{2}}$

$\boxed{\delta = \frac{c}{\omega_p}\sqrt{\frac{2}{\tau\omega}}}$ aux basses fréquences

Comme $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ et $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ on a

$\omega_p^2 = \frac{\gamma_0}{\tau\varepsilon_0}$ soit $\delta = c\sqrt{\frac{2\tau\varepsilon_0}{\tau\omega\gamma_0}}$

Et avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}$ formule effet de peau

B15) $\delta = \sqrt{\frac{2}{4\pi\cdot10^{-7}\times3{,}5\cdot10^{7}\times10^{-4}\times1{,}4\cdot10^{14}}}$

$\underline{\delta = 1{,}8\ \mu m}$

$\omega = 10^{-4}\omega_0 \longrightarrow \underline{\lambda} = 10^4\lambda_0 = \underline{13\ cm}$ "ondes <u>radar</u>"

Comme $\delta \ll \lambda$ on peut dire que l'aluminium est comme un miroir pour les ondes radar.

B16) Si $\omega \to \infty$ alors $h \simeq j\frac{\omega_p^2\tau}{j\omega^2\tau} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

alors $\sigma = \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac12}$

Quand $\omega \to \infty$ $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ peut être considéré comme un infiniment petit et $\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{\frac12} \simeq 1-\frac12\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

d'où $\sigma = \frac{\omega}{c}\left(1-\frac12\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \in \mathbb{R}$ $\quad \sigma'' = 0$

$\boxed{\delta \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \infty}$ ce qui signifie que l'aluminium devient transparent aux très très hautes fréquences.

B17) La question précédente indique que $\delta \to \infty$

Pour être plus précis il faudrait aboutir à une partie imaginaire non nulle de σ. On ne peut y arriver que si h est lui-même imaginaire d'où un d.l

$h(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1-\frac{j}{\omega\tau}\right)^{-1} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1+\underbrace{\frac{j}{\omega\tau}}_{\ll 1 \text{ quand } \omega \gg \frac{1}{\tau}}\right)$

$\sigma = \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - j\frac{\omega_p^2}{\omega^2\,\omega\tau}\right) \simeq \sigma' - j\sigma''$ d'où

$\sigma'' = \frac{\omega_p^2}{c\,\omega\tau}$ soit $\boxed{\delta'' = \frac{1}{\sigma''} = \frac{c\,\omega^2\tau}{\omega_p^2}}$ à T.H.F.

AN : $\delta'' = \frac{3\cdot10^8\times10^8\times1{,}4\cdot10^{14}}{2{,}4^2\times10^{16\times2}} = \underline{7{,}3\ mm}$

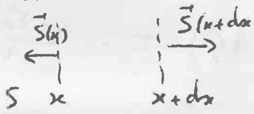
Ce n'est pas l'infini ! mais $\delta'' \gg \lambda = 0{,}13\ \mu m$

C18) La conservation de l'énergie électromagnétique conduit à $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \vec{j}\cdot\vec{E} = -\,\mathrm{div}\,\underset{\text{Poynting}}{\vec{R}}$

En moyenne temporelle u_{em} ne varie pas dans le temps car les champs $\vec{E}$ (et donc $\vec{B}$) ne varient pas en <u>moyenne</u> dans le temps.

d'où $\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle = -\,\mathrm{div}\langle\vec{R}\rangle$

Sur un élément de volume $S\,dx$ entre x et $x+dx$



$\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle S\,dx = -\oiint\langle\vec{R}\rangle\,d\vec{S}$

$= -\langle\vec{R}_{x+dx}\rangle S + \langle\vec{R}_x\rangle S$

pour respecter les conventions de signe S vers l'extérieur

Or $\langle\vec{R}\rangle S = P$ puissance moyenne traversant S

donc $-dP = \langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle S\,dx$

Comme $\vec{j} = \gamma_0\vec{E}$ aux très basses fréquences

$-dP = \gamma_0 S\langle E^2\rangle dx$

On a bien $\boxed{\frac{dP}{dx} = -\gamma_0 S\langle E^2\rangle}$

C19) Or $E = E_0 e^{-\sigma''x}\cos(\omega t - \sigma' x)$

(attention prendre la notation <u>réelle</u> pour des grandeurs quadratiques)

donc $\langle E^2\rangle = E_0^2 e^{-2\sigma''x}\times\frac12$ (moyenne temporelle d'un $\cos^2 = \frac12$)

$\frac{dP}{dx} = -\gamma_0 S E_0^2 \frac12 e^{-2\sigma''x}$ avec $\sigma'' = \frac{1}{\delta}$ du B14)

Intégrons : $P_\infty - P_0 = \int_{x=0}^{\infty} -\gamma_0 S E_0^2 \frac12 e^{-2\sigma''x}\,dx$

$\boxed{P_\infty - P_0 = -\gamma_0\frac{SE_0^2}{2}\cdot\frac{1}{2\sigma''} = -\gamma_0\frac{SE_0^2\delta}{4}}$ représente la puissance en sortie du métal − la puissance en entrée

c.à.d que $\frac{\gamma_0 S E_0^2\delta}{4}$ représente la puissance fournie au métal au cours de la traversée de l'onde