

1) Maxwell-Gauss : $\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$
 $\boxed{\vec{E} = -\text{grad } V}$
 $\Rightarrow \text{div}(-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

or $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$ (laplacien)

donc $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0}$ (ok)

ρ charge volumique en C.m^{-3}

ϵ_0 permittivité diélectrique du vide

si on utilise la capacité $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ du condensateur plan alors ϵ_0 en F.m^{-1} (l'unité est donnée en 18)

2) Analogie gravitationnel par remplacement de $\frac{1}{\epsilon_0}$ par $-\gamma$ de $\vec{E}$ par $\vec{G}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta V_{\text{grav}} - 4\pi\gamma \rho_{\text{grav}} = 0}$

• En diffusion thermique, en régime permanent, sans source $\Delta T = 0$

Avec source, on a un terme lié à la production interne de chaleur.

$\Delta T + \frac{1}{k} = 0$ où 1 est

la puissance volumique absorbée par le milieu et k sa conductivité thermique

3) En coordonnées cartésiennes

$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$

En remplaçant $x = LX$ $y = LY$

cela donne $\Delta V = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right)$

d'où $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\rho L^2}{\epsilon_0} = 0$

Ainsi $\boxed{\rho' = \frac{\rho L^2}{\epsilon_0}}$ et $\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \rho' = 0}$

$V(x_i+h, y_j) = V(x_i, y_j) + \frac{\partial V}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h^2$

$V(x_i-h, y_j) = \dots + \dots$

$V(x_i, y_j+h) = V(x_i, y_j) + \frac{\partial V}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} h^2$

$V(x_i, y_j-h) = \dots - \frac{\partial V}{\partial y} h + \dots$

on ajoute : $V(x_i+h, y_j) + V(x_i-h, y_j) + V(x_i, y_j+h) + V(x_i, y_j-h)$

$V(x_i, y_j-h) = 4V(x_i, y_j) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) h^2$

d'où $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(x_i+h, y_j) + V(x_i-h, y_j) + V(x_i, y_j+h) + V(x_i, y_j-h) - 4V(x_i, y_j)}{h^2}$ (ok)

5) Alors $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j)}{h^2}$

partant de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \rho' = 0$ on arrive à :

$V(i+1, j) + V(i-1, j) + V(i, j+1) + V(i, j-1) - 4V(i, j) + \rho' h^2 = 0$

on arrive à (1) de l'énoncé avec $\rho'' = \rho' h^2$

soit $\boxed{\rho'' = \frac{\rho L^2 h^2}{\epsilon_0}}$

(le corrigé de la partie modélisation est gravement donné par un collègue)

def nouveau-potentiel(V, rho, frontier, i, j) :

if frontier(i, j) == True

return V[i, j]

else

ref = 0.25 * [V[i, j+1] + V[i, j-1] + V[i+1, j] + V[i-1, j]] + rho[i, j]

return ref

7) La nouvelle valeur de $V[i, j]$

nécessite toutes les anciennes valeurs, en particulier celle de $V(i-1, j)$

et si on calcule à $i+1$, $V(i+1, j)$

vient donc de prendre sa nouvelle valeur qui ne doit donc pas remplacer l'ancienne, d'où la nécessité pendant une itération

d'avoir 2 tableaux l'ancien pour tous les calculs pendant l'itération

et le nouveau de lequel seront placées les nouvelles valeurs qui serviront d'ancienne à l'itération suivante.

8) Calcul de l'erreur :

def calcul-erreur (V1, V2) :

N, M = V1.shape

E = 0

for i in range(N) :

for j in range(M) :

E += (V1[i,j] - V2[i,j])**2

err = math.sqrt(E) / N

return err

def itere-J (V, rhos, frontier) :

V1 = np.copy(V)

N, M = V1.shape

for i in range(N) :

for j in range(M) :

V[i,j] = nouveau-potentiel(V1, rhos, frontier, j)

err = calcul-erreur (V1, V)

return err

(Rq : ancienne matrice V1
on modifie V en utilisant V1)

9) def poisson(f-iter, V, rhos, frontier, eps) :

err = 2 * eps

while err >= eps :

err = f-iter (V, rhos, frontier)

10) On utilise maintenant la nouvelle valeur de $V(i-1, j)$ et de $V(i, j-1)$. Le changement se fait en cours d'une même itération. Donc on peut utiliser 1 seule matrice modifiable en temps réel.

On garde nouveau-potentiel qu'on applique à V et non à V1.

11) def itere-GS (V, rhos, frontier) :

V1 = np.copy(V)

N, M = V.shape

for i in range(N) :

for j in range(M) :

V[i,j] = nouveau-potentiel(V, rhos, frontier, i, j)

err = calcul-erreur (V1, V)

return err

12) def nouveau-potentiel-SOR (V, rhos, frontier, i, j, omega) :

return $V(i,j) * (1 - \omega) + \omega * \text{nouveau-potentiel}(V, rhos, frontier, i, j)$

(Rq pas besoin de tout recopier, on utilise la définition de nouveau-potentiel)

13) def itere-SOR (V, rhos, frontier) :

V1 = np.copy(V)

N, M = V.shape

omega = $2 / (1 + \text{math.pi} * N)$

for i in range(N) :

for j in range(M) :

V[i,j] = nouveau-potentiel-SOR (V, rhos, frontier, i, j, omega)

err = calcul-erreur (V1, V)

return err

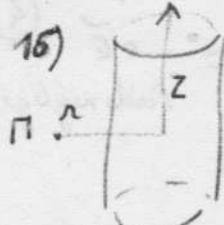
14)

$$15) E_{x(i,j)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V(i+1,j) - V(i,j)}{h \cdot L}$$

(en effet $V(i+1,j) = V(i,j) + \frac{\partial V}{\partial x} h$ et $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial x}$)

$$\text{De } \hat{m} E_{y(i,j)} = -\frac{V(i,j+1) - V(i,j)}{h \cdot L}$$

$$\text{Aux frontieres } E_x(N,j) = -\frac{V(N,j) - V(N-1,j)}{h \cdot L} = E_{x(N-1,j)}$$



16) La charge est invariante selon l'axe z si le cylindre est infini. Elle est invariante par rotation. Donc E ne dépend que de r distance à l'axe.

Les plans passant par $(\Pi, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et par $(\Pi, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont de symétrie par la charge donc $\vec{E} \parallel \vec{e}_r$.

Résumé : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$ OK
Les équipotentielles sont $\perp$ lignes $\vec{E}$ donc sont des cylindres d'axe z.

17) Th. de Gauss sur surface de Gauss fermée = cylindre d'axe z passant par Π , hauteur h.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

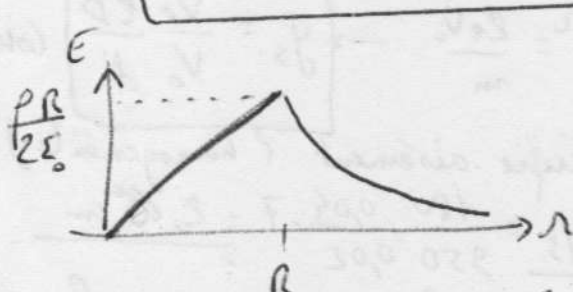
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{dessus}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{dessous}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= 0 + 0 + E(r) 2\pi r h$$

Pour q_{int} , 2 cas à envisager :
si $r \geq R$ alors $q_{int} = \rho \pi R^2 h$
si $r \leq R$ alors $q_{int} = \rho \pi r^2 h$

d'où

si $r \geq R$	$E(r) = \frac{\rho R^2}{2 r \epsilon_0}$
si $r \leq R$	$E(r) = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0}$



18) AN $E_{max} = \frac{\rho R}{2 \epsilon_0} = \frac{10^{-5} \times 5 \times 10^{-2}}{2 \times 8,85 \times 10^{-12}}$

$E_{max} = 2,82 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$

$E(r=2R) = \frac{1}{2} E_{max} = 1,41 \text{ V.m}^{-1}$

19) def dans-cylindre (x, y, x_c, y_c, R) :
calc = $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2$
return calc $\leq R^2$

(Rq True si $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 \leq R^2$
False sinon

20) def initialise-rhos-cylindre(tab-rhos):

(Rq $R = \frac{L}{4}$ $h = \frac{L}{N}$)
en 5) $\rho'' = \frac{\rho L^2}{\epsilon_0} \frac{h^2}{\sum_{i=1}^N 1} = \frac{\rho L^2}{\epsilon_0} \frac{1}{N} = \frac{\rho}{\epsilon_0} h^2$
le centre du cylindre est $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$

ref = $\rho / \epsilon_0 \times h^2$
for i in range(N+1):
 for j in range(N+1):
 if dans-cylindre(i*h, j*h, $\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}$):
 tab-rhos(i, j) = ref

(Rq : pour les points dans le cylindre on aura remplacé les 0 par 1 de tab-rhos sinon on laisse 0 ailleurs.)

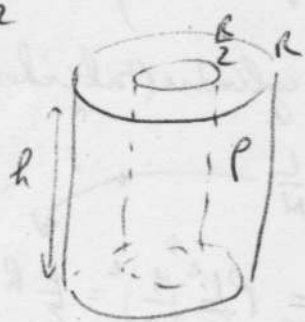
21) La frontière contient les points $i=0$ ou $i=N$ ou $j=0$ ou $j=N$.
def initialise-frontiere-cylindre(tab-f):

for i in range(N+1):
 tab-f[i, 0] = 1
 tab-f[i, N] = 1
 tab-f[0, i] = 1
 tab-f[N, i] = 1

22) Les équipotentielles se déforment au fur et à mesure qu'on approche du carré où $V=0$ (Au début ce sont bien des cercles).

Le champ E respecte la linéarité à l'intérieur ; la décroissance en $\frac{1}{r}$ à l'extérieur semble limitée aux bords.
On lit $E_{max} \approx 28000 \text{ V.m}^{-1}$ satisfaisant
 $E(2R) = 18000 \text{ V.m}^{-1}$ moins satisfaisant

23) $E=0$ jusqu'en $\frac{R}{2}$. Il n'y a donc pas de charge jusqu'en $\frac{R}{2}$. C'est un cylindre creux chargé entre $\frac{R}{2}$ et R .



Le th de Gauss mènera par q_{int} :
 $q_{int} = 0$ si $r < \frac{R}{2}$
 $q_{int} = \rho \pi (r^2 - \frac{R^2}{4}) h$ si $\frac{R}{2} < r < R$
 $q_{int} = \rho \pi (R^2 - \frac{R^2}{4}) h$ si $r > R$

d'où

$$E = 0 \text{ si } r < \frac{R}{2}$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r^2 - \frac{R^2}{4} \right) \text{ si } \frac{R}{2} < r < R$$

$$E = \frac{3\rho R^2}{4\epsilon_0 r} \text{ si } r > R$$

Le champ max est obtenu en R

$$E_{max} = \frac{3}{4} \frac{\rho R}{\epsilon_0} = \frac{3}{4} \times \frac{2,82 \cdot 10^{-4}}{8,85 \cdot 10^{-12}} = 7,8 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$$

calculé en 18)

A la lecture fig 5 : $E_{max}(R) = 21000 \text{ V.m}^{-1}$
 C'est satisfaisant.

24) $E_m = ct$ (pas de frottement)
 $\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - eV = ct$

$$0 - 0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - eV_0 \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

AN $v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 950}{9,11 \times 10^{-31}}} = 1,83 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$

C'est quand même proche de $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
 On est à la limite classique/relativiste.

25) Condensateur plan ∞ : $E = \frac{2V_p}{d}$

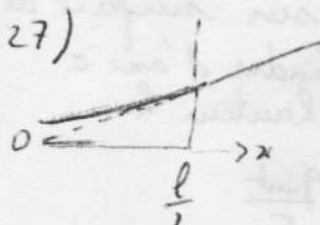
$$E = \frac{2 \times 180}{2 \times 10^{-2}} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ V.m}^{-1}$$

$$\vec{E} \text{ du } + \text{ vers } - \quad \vec{E} = - \frac{2V_p}{d} \vec{e}_y$$

26) PFD à e^- : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ (4)
 $\vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0$
 $\vec{r} = -\frac{e}{m} \frac{\vec{E} t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{0}$

$$y = \frac{e}{2m} \frac{2V_p t^2}{d} \Rightarrow y = \frac{eV_p}{mdv_0^2} \left(x - \frac{l}{2} \right)^2$$

tant que l'e- est dans $\vec{E}$, c'ad $|x| < \frac{l}{2}$

27)  Après $x > \frac{l}{2}$
 $\vec{v} = cte = \vec{v}(\frac{l}{2})$
 et $y(\frac{l}{2}) = \frac{eV_p l^2}{mdv_0^2}$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow x' = l \Rightarrow t = \frac{l}{v_0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\frac{l}{2}) = \left(v_0, \frac{2eV_p l}{mdv_0^2} \right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2eV_p l}{mdv_0^2} \left(x - \frac{l}{2} \right) + \frac{eV_p l^2}{mdv_0^2}$$

$$y = \frac{2eV_p l}{mdv_0^2} x \quad (\text{OK})$$

Fig 7 montre que cette droite passe par 0 (normal c'est linéaire)

$$y_s = y(D) = \frac{eV_p l}{mdv_0^2} D$$

$$\text{or } v_0^2 = \frac{2eV_0}{m} \rightarrow y_s = \frac{V_p l D}{V_0 d} \quad (\text{OK})$$

(on vérifie aisément l'homogénéité).

AN : $y_s = \frac{180}{950} \frac{0,04 \cdot 7}{0,02} = 2,65 \text{ cm}$

28) Aucune charge volumique : ρ_{vol} est la matière nulle.

29) Rq $\forall i, j=0$: $V=0$ bord inférieur
 $\forall i, j=N$: $V=0$ bord supérieur
 $\forall j, i=0$: $V=0$ bord gauche
 $\forall j, i=N$: $V=0$ bord droit

def initialise-frontiere-condensateur(tab-V, tab-f):

for i in range(N+1):

$$\text{tab-f}[i, 0] = 1$$

$$\text{tab-f}[0, i] = 1$$

$$\text{tab-f}[i, N] = 1$$

$$\text{tab-f}[N, i] = 1$$

for i in range(10, 50):

$$\text{tab-f}[i, 40], \text{tab-V}[i, 40] = 1, -V_p$$

$$\text{tab-f}[i, 60], \text{tab-V}[i, 60] = 1, V_p$$

(Rq: 10 à 50 correspond à la largeur du condensateur
40 correspond au bord inférieur à $-V_p$
60 à son bord supérieur à V_p)

30) Ça ressemble à un d.P:

$$E_x(x, y) = E_x(ih + r_x, jh + r_y) \\ = E_x(ih, jh) + \frac{\partial E_x}{\partial x} r_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} r_y$$

$$\text{or } \frac{\partial E_x}{\partial x}(i, j) = \frac{E_x(i+1, j) - E_x(i, j)}{h}$$

$$\text{d'où } E_x(x, y) = E_x(i, j) + \frac{1}{h} (E_x(i+1, j) - E_x(i, j)) r_x \\ + \frac{1}{h} (E_x(i, j+1) - E_x(i, j)) r_y$$

$$E_y(x, y) = E_y(i, j) + \frac{1}{h} (E_y(i+1, j) - E_y(i, j)) r_x \\ + \frac{1}{h} (E_y(i, j+1) - E_y(i, j)) r_y$$

On a calculé E_x, E_y aux points de coordonnées $x = ih, y = jh$

on pourra obtenir E_x, E_y pour $x = ih + r_x$
 $y = jh + r_y$

en choisissant r_x, r_y entre 0 et h, donc en tout point.

$$31) v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow \delta x = v_x \delta t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow \delta y = v_y \delta t$$

$$m a_y = -e E_y \rightarrow \delta v_y = -\frac{e E_y \delta t}{m}$$

$$m a_x = -e E_x \rightarrow \delta v_x = -\frac{e E_x \delta t}{m}$$

(OK)

$$32) \vec{v} = \vec{v}_0 \text{ quand } x = 1 \text{ cm } y = 5 \text{ cm} \quad (5)$$

Comme $v_x = \text{cte}$, durée pour parcourir la largeur totale = $\frac{L}{v_x} = \frac{L}{v_0}$

$$\text{on veut } \frac{L}{v_0} = N \delta t \text{ donc } \delta t = \frac{L}{N v_0} = \frac{L}{200 v_0}$$

$$AN: \delta t = \frac{10 \times 10^{-2}}{200 \times 1,87 \times 10^7} = 0,27 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

$$33) v_0 = \text{math.sqrt}(2 \times e \times V_0 / m)$$

$$\delta t = L / (200 \times v_0)$$

$$lx[0] = 1E-2$$

$$ly[0] = 5E-2$$

$$lvx[0] = v_0$$

$$lvy[0] = 0$$

34) for k in range(1, Npts):

$$lx[k] = lx[k-1] + lvx[k-1] * \delta t$$

$$ly[k] = ly[k-1] + lvy[k-1] * \delta t$$

$$lvx[k] = lvx[k-1] - e/m * \delta t * \text{val } E_x(E_x, E_y, lx[k-1], ly[k-1], k)$$

$$lvy[k] = lvy[k-1] - e/m * \delta t * \text{val } E_y(E_x, E_y, lx[k-1], ly[k-1], k)$$

35) Le calcul en 27 a donné $y_s = 2,65 \text{ cm}$
par rapport au milieu du condensateur

La courbe (2) arrive entre 0,07 et 0,08 cm qui fait bien un décalage entre 0,02 et 0,03 cm

La courbe (1) arrive entre 0,08 et 0,09 ce qui fait un + grand décalage > 0,03 cm

La courbe (2) est donc la théorique. Cette courbe théorique n'a pas tenu compte des lignes de champ en sortie du condensateur (effets de bord). L'écart avec la simulation (+ proche de la vérité) est d'environ $\frac{0,083 - 0,076}{0,026} \approx 30\%$

