Extrait de sujet X PC

sur le calcul en pelures d'oignon

Dans un amas de galaxies règne un gaz chaud d'atomes d'hydrogène scindés en ions et électrons, dont la densité en électrons suit la loi expérimentale $n_e = \dfrac{n_0}{1+\dfrac{r^2}{r_A^2}}$ où n_0 et r_A sont des constantes. Calculer la masse M_{gaz} du gaz jusqu'à la limite $4r_A$ de l'amas.

Données : masse de l'atome H : $m_H = 1{,}67\ .10^{-27}$ kg $\qquad n_0 = 1{,}5\ .10^{3}\ m^{-3}$

$r_A = 0{,}3$ Mpc $\quad$ 1pc = 1 Parsec = $3{,}09\ .\ 10^{16}$ m $\qquad \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+u^2}du = \arctan x$

Réponse

- Masse volumique du gaz H : $n_e\, m_H$
- Calcul en *pelures d'oignon* : $\displaystyle M_{gaz} = \int_0^{4r_A} 4\pi r^2 dr . n_e m_H$

  où $4\pi r^2 dr$ représente le volume de la couche comprise entre r et r+dr

  d'où $\displaystyle M_{gaz} = \int_0^{4r_A} 4\pi r^2 dr \frac{n_0}{1+\dfrac{r^2}{r_A^2}} m_H = 4\pi\, n_0 m_H \int_0^{4r_A} \frac{r^2 dr}{1+\dfrac{r^2}{r_A^2}}$
- Calculons l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{4r_A} \frac{r^2 dr}{1+\dfrac{r^2}{r_A^2}}$;

  on la multiplie par $\dfrac{r_A^2}{r_A^2}$ et on remplace $\dfrac{r^2}{r_A^2}$ au numérateur par $\left(1+\dfrac{r_A^2}{r_A^2}\right)-1$:

  $$I = r_A^2\left(4r_A - \int_0^{4r_A} \frac{dr}{1+\dfrac{r^2}{r_A^2}}\right)$$

  On fait un changement de variable $u = r/r_A$: $\displaystyle \int_0^{4r_A} \frac{dr}{1+\dfrac{r^2}{r_A^2}} = \int_0^{4} \frac{r_A du}{1+u^2} = r_A \arctan 4$

  $I = r_A^3\ (4 - \arctan 4)$
- On trouve finalement : $M_{gaz} = 4\pi n_0 m_H r_A^3 (4 - \arctan 4)$
- A.N. $\quad M_{gaz} = 4\pi.1{,}5.10^3.1{,}67.10^{-27}.0{,}3^3.10^{18}.3{,}09^3.10^{48}(4\text{-}\arctan 4) = 0{,}67.10^{44}$ kg