

PREMIÈRE PARTIE

ONDE ELASTIQUE DANS UN BARREAU SOLIDE

Le référentiel terrestre R_T est supposé galiléen

A – Modèle microscopique et approximation des milieux continus

À l'échelle microscopique, un matériau solide homogène peut être modélisé par une chaîne infinie d'atomes assimilés à des points matériels de même masse m et reliés entre eux par des ressorts identiques, de longueur à vide a et de raideur K . Ces ressorts modélisent, dans l'approximation linéaire, les interactions électromagnétiques entre les atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre.

Considérons un modèle unidimensionnel dans lequel tous les atomes se déplacent sans frottement sur un axe Ox . La figure 1 représente cette disposition où chaque atome est numéroté par un entier n . Lorsqu'il est en équilibre mécanique, l'atome référencé (n) est situé à l'abscisse $x_n(\text{éq}) = na$; en dehors de l'équilibre, sa position devient $x_n(t) = x_n(\text{éq}) + u_n(t)$.

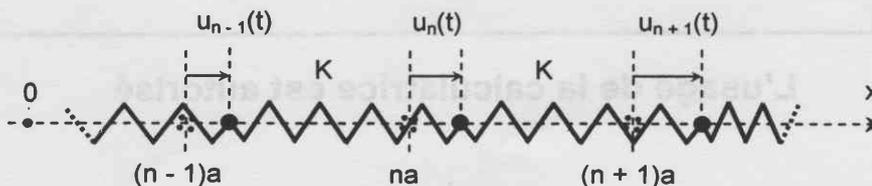


Figure 1 : Chaîne infinie d'atomes

A1*a. Établir l'expression de la résultante des forces exercées par les atomes ($n - 1$) et ($n + 1$) sur l'atome (n).

A1*b. En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'atome (n) et montrer qu'elle peut s'écrire : $\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \omega_0^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$, en explicitant ω_0 en fonction de K et m .

L'équation précédente admet des solutions sinusoïdales de pulsation ω . Afin de les étudier, introduisons la représentation complexe $\underline{u}_n(t)$ et cherchons ces solutions sous la forme $\underline{u}_n(t) = \underline{U}_n \exp(j\omega t)$ où \underline{U}_n désigne l'amplitude complexe du déplacement de l'atome (n).

A2*a. Établir la relation entre ω , ω_0 , \underline{U}_{n-1} , \underline{U}_n et \underline{U}_{n+1} .

A2*b. Quelle est la valeur particulière de ω associée à une solution telle que $\underline{U}_{n-1} = \underline{U}_n$ pour toute valeur de n ? Quelle interprétation physique peut-on en donner ?

A2*c. Déterminer de même la pulsation correspondant à $\underline{U}_n = -\underline{U}_{n-1}$ pour toute valeur de n .

Dans toute la suite de cette partie, nous étudierons une solution particulière de la forme $\underline{u}_n(t) = \underline{A} \exp[j(\omega t - k na)]$ où \underline{A} est un nombre complexe indépendant de n et k un nombre réel.

A3*a. Quelle signification physique peut-on attacher à ce type de déplacement ? Quelle hypothèse fait-on en supposant que \underline{A} est indépendant de n ?

A3*b. Vérifier que l'expression proposée est bien solution de l'équation établie en **A1*b**, à condition que k , ω , ω_0 et a soient reliés par une équation à expliciter.

Réaliser un schéma représentant l'évolution de ω en fonction de k . Quel est le domaine de pulsations admissibles ?

A3*c. Pourquoi est-il possible de restreindre les valeurs de k à l'intervalle $[-\pi/a, \pi/a]$?

A3*d. Montrer que le déplacement $u_n(t)$ reproduit exactement le déplacement $u_{n-1}(t)$, mais avec un retard temporel τ dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 , k et a .
En déduire qu'il est possible de définir une vitesse de phase $V_\varphi = \omega/k$. La propagation est-elle ou non dispersive ?

Considérons désormais le cas particulier où k est positif.

A4*a. Déterminer la vitesse de phase V_φ et la vitesse de groupe V_g en fonction de ω_0 , k et a .

A4*b. Quelles sont les valeurs limites de ces deux vitesses lorsque $k \rightarrow 0$. Commenter.

A4*c. Étudier de même les limites lorsque $k \rightarrow \pi/a$. Quelle signification physique peut-on attribuer aux résultats obtenus ?

L'approximation des milieux continus permet de faire passer une fonction $u(x,t)$ par tous les points représentatifs des atomes de la chaîne à chaque instant (figure 2). Cela est possible lorsque u_n est peu différent de u_{n+1} .

Définissons la fonction continue et dérivable $u(x,t)$ des variables d'espace x et de temps t telle que $u(x,t) = u_n(t)$ lorsque $x = na$. Supposons que $u(x,t)$ varie peu dans l'espace, à l'échelle de a . En considérant que l'atome (n) occupe l'abscisse x , remarquons que :

$$u(x + a, t) = u(na + a, t) = u_{n+1}(t)$$

et

$$u(x - a, t) = u(na - a, t) = u_{n-1}(t).$$

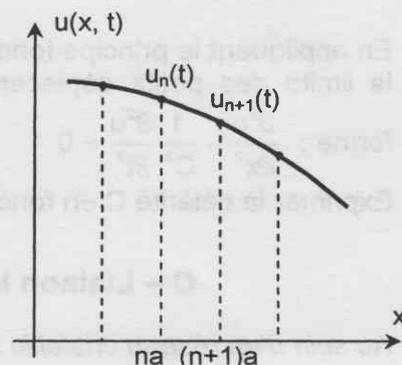


Figure 2 : Représentation de $u(x, t)$ à t fixé

A5. En utilisant un développement limité à l'ordre 2, montrer que la fonction $u(x,t)$ vérifie une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ et exprimer la célérité C en fonction de K , m et a . Comparer C à une expression obtenue en A4. et interpréter ce résultat.

B – Modèle macroscopique et module d'Young

Un barreau solide est initialement immobile dans un référentiel galiléen d'axe Ox . Lorsqu'il est au repos, ce barreau est un cylindre homogène d'axe Ox , taillé dans un matériau de masse volumique ρ , dont l'aire de chaque section sera notée S .

Une onde de déformation élastique longitudinale (onde de compression-dilatation) se propage à l'intérieur du barreau dans la direction de Ox ; cette onde est caractérisée par le champ scalaire des déplacements $u(x,t)$ tel qu'une section située à l'abscisse x en l'absence d'onde se déplace à l'abscisse $x + u(x,t)$ lors du passage de celle-ci (figure 3).

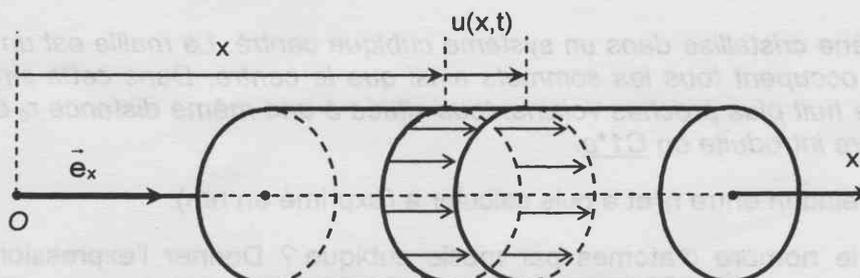


Figure 3 : Onde élastique longitudinale dans un barreau

Dans la limite des petites déformations, la matière située à gauche de la section déplacée en $x + u(x,t)$ exerce sur celle-ci une force de rappel \vec{F}_g dont l'expression générale est :

$\vec{F}_g = -E \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) S \vec{e}_x$, où E désigne le module d'élasticité d'Young. De même, la matière située à droite de la section exerce sur celle-ci une force \vec{F}_d .

B1. Etablir la dimension de E et justifier que $\vec{F}_d = -\vec{F}_g$.

En l'absence d'onde, une tranche élémentaire de barreau située entre les abscisses x et $x + dx$ possède un volume $dV = S dx$. Lors du passage de l'onde, son volume devient dV' . La dilatation volumique δ de cette tranche est définie comme le quotient $\delta = \frac{dV' - dV}{dV}$.

B2. Expliciter la relation entre δ et $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

B3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette tranche, montrer que dans la limite des petits déplacements $u(x,t)$ satisfait à une équation de d'Alembert de la forme : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

Exprimer la célérité C en fonction de E et ρ .

C – Liaison interatomique et module d'Young

Au sein d'un réseau cristallin métallique, l'énergie potentielle d'interaction de deux atomes

A et B distants de r peut s'écrire : $E_p(r) = -\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^{10}}$, où λ et μ sont deux constantes positives.

La force exercée par A sur B est de la forme $\vec{F}_{AB} = F(r) \vec{u}$, où \vec{u} désigne le vecteur unitaire directeur de la droite (AB) , dirigé de A vers B .

C1*a. Déterminer l'expression de $F(r)$ en fonction de λ , μ et r . La distance d'équilibre entre deux atomes étant r_0 , en déduire une relation entre λ , μ et r_0 .

C1*b. Calculer les valeurs numériques de μ (exprimé en $\text{eV} \cdot \text{nm}^{10}$) et de $E_p(r_0)$ (exprimé en eV) dans le cas précis du tungstène, métal pour lequel $r_0 = 0,274 \text{ nm}$, $\lambda = 0,37 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$. (rappelons qu'un électron-volt est égal à $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)
Quel sens concret peut on donner à $E_p(r_0)$?

C1*c. Tracer l'allure de la courbe $E_p(r)$ en indiquant ses points remarquables.
Dans quels domaines de r la force entre les deux atomes est elle attractive ou répulsive ?

C2. En effectuant un développement limité de $F(r)$, montrer que pour de petits déplacements autour de la position d'équilibre r_0 , la force d'interaction $F(r)$ est équivalente à celle d'un ressort dont on explicitera la raideur K en fonction de λ et r_0 .
Calculer K (exprimé en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$) pour le tungstène.

Le tungstène cristallise dans un système cubique centré. La maille est un cube d'arête a dont les atomes occupent tous les sommets ainsi que le centre. Dans cette structure, chaque atome A possède huit plus proches voisins, tous situés à une même distance r_0 de A , r_0 étant la distance d'équilibre introduite en **C1*a**.

C3*a. Etablir la relation entre r_0 et a puis calculer a (exprimé en nm).

C3*b. Quel est le nombre d'atomes par maille cubique ? Donner l'expression de la masse volumique ρ de ce métal en fonction m (masse d'un atome) et de a .

A1 a) $F_n = K(u_{n+1} - u_n) - K(u_n - u_{n-1})$

A1 b) TCI à l'atome $\{n\}$ dans R_T galiléen
 $m \ddot{u}_n = F_n \rightarrow \ddot{u}_n = \frac{K}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$
 $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

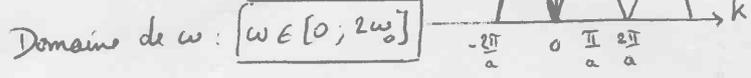
A2 a) $u_n = \underline{u} e^{j\omega t} \Rightarrow -\omega^2 \underline{u} = \omega_0^2 (\underline{u}_{n+1} + \underline{u}_{n-1} - 2\underline{u})$
 soit $(2\omega_0^2 - \omega^2) \underline{u} = \omega_0^2 (\underline{u}_{n+1} + \underline{u}_{n-1})$

A2 b) Si $u_n = u_{n-1} \forall n$ alors $\omega = 0$
 A très basse fréquence tous les atomes sont en phase et ont le même mouvement.

A2 c) Si $u_n = -u_{n-1} \forall n$ alors $4\omega_0^2 = \omega^2$
 soit $\omega = 2\omega_0$

A3 a) $e^{j(\omega t - kna)}$ représente une onde progressive harmonique dans le sens des x croissant.
 A indépendant de $n \Rightarrow$ ni amortissement ni amplification

A3 b) $-\omega^2 e^{-jkn a} = \omega_0^2 (e^{-jk(n+1)a} + e^{-jk(n-1)a} - 2e^{-jkn a})$
 soit $\omega^2 = \omega_0^2 2(1 - \cos(ka))$
 soit $\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$



A3 c) ω est périodique et paire, de période $\frac{2\pi}{a}$.
 On peut donc restreindre l'étude à $k \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$

A3 d) Déplacement de u_n en $\exp[j(\omega t - kna)]$
 u_{n-1} en $\exp[j(\omega t - k(n-1)a)]$ } donc
 $u_n(t) = \frac{u_{n-1}}{\omega} (t - \frac{ka}{\omega}) = u_{n-1} (t - \tau) \Rightarrow \tau = \frac{ka}{\omega}$
 soit $\tau = \frac{ka}{2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|}$ alors $v_g = \frac{a}{\tau} = \frac{\omega}{k}$

donc $v_g = \frac{2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|}{k}$ dépend de k donc de ω
 La propagation est donc dispersive

A4 a) Hyp: $k > 0$ donc $v_g = \frac{2\omega_0 \sin \frac{ka}{2}}{k}$
 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, on différentie $\omega = 2\omega_0 \sin \frac{ka}{2}$
 $d\omega = a\omega_0 \cos \frac{ka}{2} dk$
 d'où $v_g = a\omega_0 \cos \frac{ka}{2}$

A1) b) Lorsque $k \rightarrow 0$ $v_g \sim \frac{2\omega_0}{k} \frac{ka}{2} \rightarrow \omega_0 a$ (1)

Quand $k \rightarrow 0$ $v_g = v_p = a\omega_0$
 $v_g \sim a\omega_0$
 v_p ne dépend plus de ω
 le milieu n'est plus dispersif

A4 c) Lorsque $k \rightarrow \frac{\pi}{a}$ $v_p = \frac{2\omega_0}{k} = \frac{2\omega_0 a}{\pi}$ et $v_g \rightarrow 0$
 Quand $k \rightarrow \frac{\pi}{a}$ $v_p = \frac{2\omega_0 a}{\pi}$ et $v_g = 0$
 $v_g = 0$ signifie que l'énergie ne se propage pas

L'onde varie en $\exp[j(\omega t - n\pi)]$ ce qui correspond à des mouvements contraires pour 2 atomes successifs.
 La chaîne d'atomes ressemble alors à une succession de ressorts comprimés - étirés.

A5) Reprendre l'équ. de A1) b)
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 (u(x+a) + u(x-a) - 2u(x))$
 avec $u(x+a) = u(x) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

cela mène à $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ soit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega_0^2 a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

ainsi $c = \omega_0 a = a \sqrt{\frac{K}{m}}$ on retrouve la valeur de v_p lorsque $k \rightarrow 0$
 $k \rightarrow 0$ correspond à $\lambda \rightarrow \infty$
 La célérité correspond à la vitesse de phase pour $a \ll \lambda$

B1) $\underline{E} \sim \frac{Fz}{\mu s} \sim \frac{\pi L T^{-2} L}{L L^2} \sim \frac{\pi L^{-1} T^{-2}}{L} \sim \frac{kg m^{-1} s^{-2}}{m} \sim kg m^{-2} s^{-2}$

rq $\underline{E} \sim \frac{F}{S} \sim$ pression
 Principe des interactions: $\vec{F}_d = -\vec{F}_g$

B2) $\int_x^{x+u(x)} \frac{dv}{dx} dx$
 $dV' = S(x+dx + u(x+dx) - (x+u(x))) = S(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$
 $dV = S dx$
 $\Rightarrow \delta = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{\partial u}{\partial x}$

B3) TCI à la tranche initialement entre x et $x+dx$
 $P S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F + F_d = -ES \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) \right)$
 $P S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$ soit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{P}{ES} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Ainsi $c = \sqrt{\frac{E}{P}}$

C1 a) Dans le référentiel où A est immobile
 $dE_p = -\vec{F}_{A/B} \cdot d\vec{r}$ par définition, $\vec{r} = \vec{AB} = r\vec{u}$
 soit $dE_p = -F(r) \frac{1}{r} \cdot d\vec{r} = -F(r) \frac{1}{r} dr = -F(r) dr$

Ainsi $F(r) = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{2\lambda}{r^3} + \frac{10\mu}{r^{11}}$

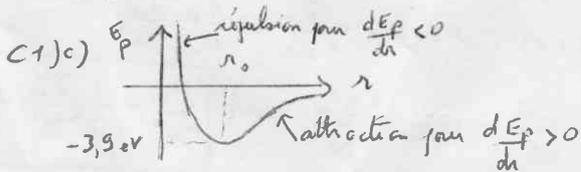
Equilibre pour $F(r_0) = 0$ d'où $r_0 = \left(\frac{5\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{8}}$

C1) b) $E_p(r_0) = -\frac{\lambda}{r_0^2} + \frac{\mu}{r_0^{10}} = -\lambda \left(\frac{\lambda}{5\mu}\right)^{\frac{2}{8}} + \mu \left(\frac{\lambda}{5\mu}\right)^{\frac{5}{4}}$

$\mu = \frac{\lambda}{5} r_0^8 = \frac{0,37}{5} \cdot 0,274^8 = 0,24 \cdot 10^{-5} \text{ eV nm}^{10}$

$E_p(r_0) = -0,37 \left(\frac{0,37}{5 \times 0,24 \times 10^{-5}}\right)^{\frac{1}{4}} + 0,24 \cdot 10^{-5} \left(\frac{0,37}{5 \times 0,24 \times 10^{-5}}\right)^{\frac{5}{4}}$

$E_p(r_0) = -3,9 \text{ eV}$ énergie potentielle lors de l'équilibre, correspond à un minimum où le réseau cristallin est le plus stable.



C2) $F(r) = -\frac{2\lambda}{r^3} + \frac{10\mu}{r^{11}} = -\frac{2\lambda}{(r_0 + \epsilon)^3} + \frac{10\mu}{(r_0 + \epsilon)^{11}}$

d.P: $F(r) = -\frac{2\lambda}{r_0^3} (1 - 3\frac{\epsilon}{r_0}) + \frac{10\mu}{r_0^{11}} (1 - 11\frac{\epsilon}{r_0})$

Sachant que $F(r_0) = 0$ il reste

$F(r) \approx \left(\frac{6\lambda}{r_0^4} - \frac{110\mu}{r_0^{12}}\right) \epsilon$ où $\epsilon = r - r_0$

Pour un modèle ressort on aurait $F(r) = -K \epsilon$

donc $K = \left(\frac{110\mu}{8} - 6\lambda\right) \frac{1}{r_0^4}$

Sachant que $r_0^8 = \frac{5\mu}{\lambda} \rightarrow K = \left(\frac{110}{5} - 6\right) \frac{\lambda}{r_0^4}$

$K = \frac{16\lambda}{r_0^4}$

$K = \frac{16 \times 0,37 \times 1,6 \times 10^{-19}}{0,274^4 \times 10^{-9 \times 2}}$

$K = 168 \text{ N.m}^{-1}$

C3) a) Dans le système cubique centré, les atomes de la diagonale du cube sont en contact;

alors $2r_0 = a\sqrt{3} \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} r_0 = 0,316 \text{ nm}$

(attention r_0 n'est pas un rayon d'atome mais la distance entre 2 atomes)

C3) b) $1 + 8 \times \frac{1}{8} = 2$ atomes / maille

$\rho = \frac{2m}{a^3}$

C4) a) on avait trouvé en B3) $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (2)

Remplaçons C par $\sqrt{\frac{K}{3m}}$ a on obtient $E = \rho \frac{K}{3m} a^2$

Avec $\rho = \frac{2m}{a^3}$ on a $E = \frac{2}{3} \frac{K}{a}$

D'après C2) on a $E = \frac{32\lambda}{3a r_0^4} \Rightarrow E = \frac{16\lambda}{\sqrt{3} r_0^5}$

et avec $a = \frac{2r_0}{\sqrt{3}}$

C4) b) $E = \frac{16 \times 0,37 \times 1,6 \times 10^{-19}}{\sqrt{3} \times 0,274 \times 10^{-9 \times 5}} = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$