ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2008 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Quelques problèmes de microfluidique pour la réalisation de « laboratoires sur puce »

Les circuits intégrés ont révolutionné la conception des ordinateurs en réduisant considérablement l'espace occupé et le temps de calcul. De la même façon, la miniaturisation de systèmes permettant le contrôle d'écoulements de fluides devrait conduire à une automatisation parallèle et rapide d'une grande variété de réactions chimiques ou de manipulations biologiques. L'objectif de ce que l'on appelle la microfluidique est la réalisation de véritables « laboratoires sur puce ». Mais la mise en mouvement et la manipulation de très petits volumes de fluide peut faire apparaître des phénomènes physiques peu courants à une échelle macroscopique.

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects de ces phénomènes. Dans la **partie I**, nous nous intéresserons à l'hydrodynamique de l'écoulement d'un ou de plusieurs liquides dans des micro-canaux. La **partie II** visera à mettre en évidence une analogie électrique des canaux ou réseaux de micro-canaux et envisagera deux applications pratiques. Dans la **partie III**, nous étudierons l'influence de l'écoulement de liquide en micro-canal sur la diffusion d'espèces moléculaires.

Formulaire : Équation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien visqueux incompressible :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right)=\rho\vec{g}-\overrightarrow{grad}\,P+\eta\Delta\vec{v}$$

Données numériques :

Masse volumique de l'eau :	$\rho = 1\times10^{3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$
Coefficient de viscosité de l'eau :	$\eta_e = 1\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$
Coefficient de viscosité de l'huile :	$\eta_h = 1\times10^{-1}\,\mathrm{Pa\cdot s}$
Coefficient de tension superficielle de l'eau :	$\gamma = 7\times10^{-2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$
Pression atmosphérique :	$P_0 = 1\times10^{5}\,\mathrm{Pa}$
Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 = 8,85\times10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$

I. Ecoulement de fluide en micro-canal

I.1 Écoulement sous un gradient de pression constant

Un canal horizontal de section rectangulaire à grand rapport de forme (hauteur $h \ll$ largeur w) et de longueur $L\,(L \gg w)$) est rempli d'un fluide newtonien. Un gradient de pression dans la direction x est généré à l'aide d'un dispositif de vases communicants imposant la différence de pression ΔP entre les extrémités O et $x = L$ du canal (figure 1) .

$\Delta P = P(0) - P(L)$

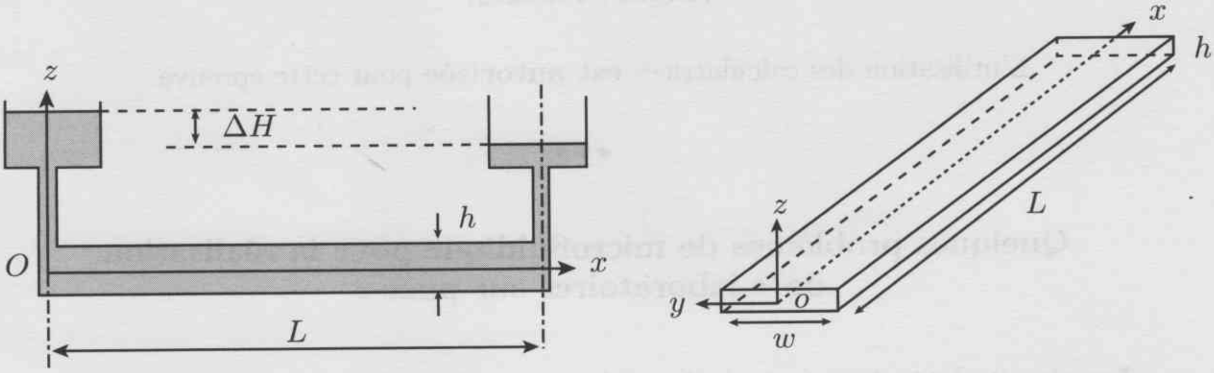


Figure 1 : (gauche) vue en coupe du canal microfluidique avec le système de vases communicants ; (droite) vue en perspective du canal.

I.1.1 Donner la signification physique du terme de gauche et des trois termes de droite de l'équation de Navier-Stokes ?

I.1.2 Donner la définition générale et le sens physique du nombre de Reynolds, Re. Préciser, en justifiant votre réponse, la longueur caractéristique qui intervient ici.
On donne : $h = 10\,\mu\text{m}, w = 100\,\mu\text{m}, L = 1\,\text{mm}$. Estimer Re pour un écoulement d'eau à la vitesse caractéristique $V_0 = 100\,\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Qu'en concluez-vous ?

I.1.3 On considère un écoulement laminaire selon Ox entre deux plaques parallèles distantes de h. Comme $w \gg h$, on considère que le champ de vitesses ne dépend pas de y. Justifier que $\vec{v} = v_x(z,t)\vec{e}_x$ pour un fluide incompressible.

I.1.4 On s'intéresse au régime stationnaire. Montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ est indépendant de x et l'exprimer à l'aide de ΔP et L. Ecrire l'équation différentielle qui donne $v_x(z)$.

I.1.5 En faisant l'hypothèse de non-glissement aux parois, déterminer le champ de vitesse. Exprimer la vitesse maximale $V_{\max}$ au centre de l'écoulement et la vitesse moyenne V_0 en fonction de ΔP.

I.1.6 Montrer que le débit volumique Q dans la section du canal est directement relié à ΔP par : $Q = \dfrac{h^3 w}{12\,\eta}\dfrac{\Delta P}{L}$ (relation de Hagen-Poiseuille).

I.1.7 Calculer numériquement ΔP et la différence de niveaux d'eau ΔH à ajuster dans le dispositif de vases communicants pour obtenir un écoulement d'eau avec un débit Q de $1 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ dans un canal de dimensions $h = 10\,\mu\mathrm{m}$, $w = 100\,\mu\mathrm{m}$, $L = 1\,\mathrm{mm}$. Qu'en est-il si $h = 100\,\mu\mathrm{m}$ (en supposant que la relation de Hagen-Poiseuille reste valable) ? Commenter.

I.2. Ecoulement biphasique

Deux fluides 1 et 2 de viscosités η_1 et η_2 sont mis en écoulement avec des débits Q_1 et Q_2 dans un canal microfluidique ayant la forme d'une jonction Y (figure 2).

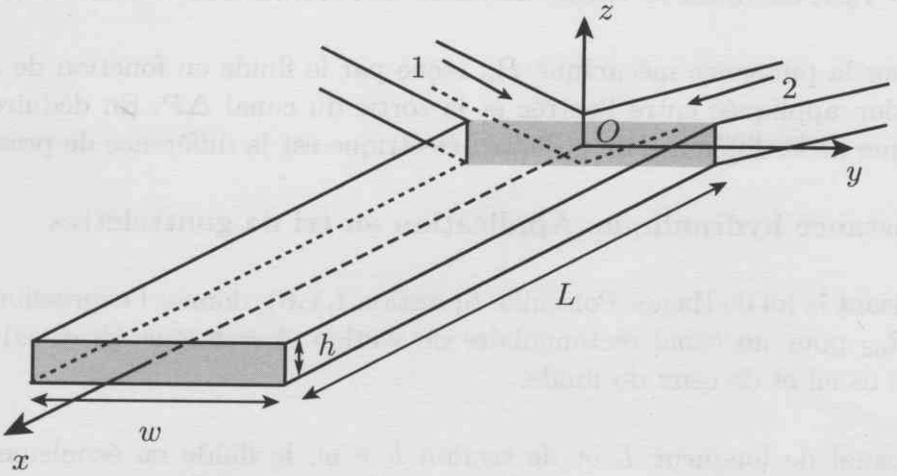


Figure 2 : Vue en perspective du canal en forme de jonction Y. On s'intéresse à l'écoulement dans le canal central, entre les deux zones grisées. L'origine des axes du repère cartésien est prise au centre de la section de raccordement.

On suppose qu'un écoulement stationnaire est établi dans le bras central du canal. L'interface entre les deux fluides est supposée plane et localisée dans le plan d'équation $y = \alpha w/2$ (avec $-1 < \alpha < 1$). On note ΔP le gradient de pression longitudinal constant appliqué sur la longueur L du canal principal.

Comme $h \ll w$, on admet que l'écoulement dans chaque fluide satisfait l'équation différentielle obtenue en I.1.4. On néglige donc les effets de bord aux parois et à l'interface entre les deux fluides. On note v_1 et v_2 les champs de vitesse dans les fluides 1 et 2.

I.2.1 Calculer la position α de l'interface en fonction de η_1, η_2, Q_1 et Q_2.

I.2.2 Le fluide 1 est de l'eau, le fluide 2 est de l'huile. Calculer numériquement α pour $Q_1 = 50\,Q_2$.

II. Analogie électrique des canaux microfluidiques

On considère le micro-canal de la figure 1, empli d'un fluide incompressible. Sa circulation dans le canal présente des analogies avec la circulation du courant électrique dans un conducteur. En particulier la viscosité oppose une résistance à l'écoulement qui est analogue à la résistance d'un conducteur ohmique.

II.1. Analogues hydrauliques du courant et de la tension électrique

II.1.1 Expliquer pourquoi l'analogue de l'intensité du courant électrique est le flux volumique $Q = \int \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = V_0 A$, où V_0 est la vitesse moyenne de l'écoulement et A la section du canal.

II.1.2 Exprimer la puissance mécanique P_m reçue par le fluide en fonction de Q et de la différence de pression appliquée entre l'entrée et la sortie du canal ΔP. En déduire que l'analogue hydrodynamique de la différence de potentiel électrique est la différence de pression ΔP.

II.2. Résistance hydraulique. Application au tri de gouttelettes

II.2.1 En utilisant la loi de Hagen-Poiseuille (question **I.1.6**), donner l'expression de la résistance hydraulique R_{hd} pour un canal rectangulaire de section $A = h \times w$ ($h \ll w$) en fonction des paramètres du canal et de ceux du fluide.

Dans un canal de longueur L et de section $h \times w$, le fluide en écoulement est formé de gouttelettes d'huile dispersées dans l'eau avec une fréquence d'émission régulière. On admet que les gouttelettes d'huile (viscosité η_h) et l'eau (viscosité η_e) se déplacent dans le canal principal avec la même vitesse moyenne, dans un écoulement laminaire et stationnaire de débit volumique total Q_0. Les gouttes d'huile confinées dans le canal sont assimilables à des parallélépipèdes rectangles de section $h \times w$ et de longueur L_g (on néglige les effets de bord dus à la géométrie rectangulaire du canal). Soit $\lambda - L_g$ la distance qu'occupe l'eau entre deux gouttes d'huile (figure 3).

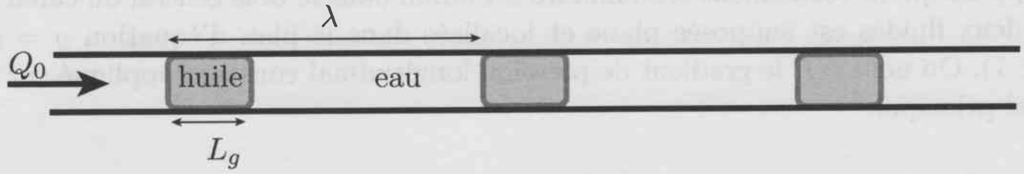


Figure 3 : Vue en coupe (horizontale) d'un canal microfluidique contenant des gouttelettes d'huile (grises) dispersées dans de l'eau.

II.2.2 On définit le paramètre $r_e = \dfrac{12\,\eta_e}{h^3 w}$. Que représente physiquement r_e ?

II.2.3 Exprimer la chute de pression ΔP sur une longueur $L = n\lambda$ de canal contenant n gouttes d'huile en fonction de Q_0, de r_e et des paramètres des fluides. Simplifier cette expression pour $\eta_e \ll \eta_h$.

II.2.4 Le micro-canal précédent est terminé par une bifurcation qui scinde le canal principal en deux bras secondaires de même section et de longueurs respectives L_1 et L_2. On note Q_0, Q_1 et Q_2 les débits volumiques dans les canaux principal et secondaires (figure 4). Quel est l'équivalent électrique de la loi de conservation du débit à la jonction ? Justifier.

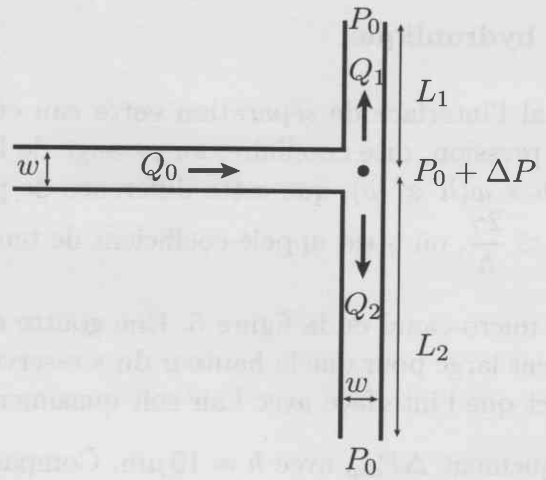


Figure 4 : Vue en coupe (horizontale) d'un micro-canal présentant une bifurcation du bras principal en deux bras secondaires.

II.2.5 Au temps initial, les canaux 1 et 2 ne sont remplis que d'eau. On admet que les gouttes d'huile suivent systématiquement les lignes de plus grand flux volumique. Si $L_2 > L_1$, vers quel bras secondaire seront orientées préférentiellement les gouttes d'huile ?

II.2.6 Expliquer qualitativement ce qui se passe lorsqu'un nombre croissant de gouttes pénètre dans un des deux bras secondaires. Montrer qu'une condition pour qu'un tri de gouttes sans faute soit réalisé en régime stationnaire (c'est-à-dire pour que toutes les gouttes soient toujours orientées vers un seul des deux canaux secondaires) est : $\dfrac{L_g}{\lambda} \leqslant \dfrac{\eta_e}{\eta_h}\dfrac{L_2 - L_1}{L_1}$.

II.3. Inertance hydraulique

II.3.1 A $t = 0$, on applique une différence de pression ΔP_i sur un fluide incompressible de masse volumique ρ, au repos à $t < 0$, confiné dans un micro-canal de section $A = h \times w$ et de longueur L. On s'intéresse ici au régime transitoire lié à la mise en mouvement du fluide, avant établissement du régime permanent. On ne prend pas en compte dans cette question les effets dus à la viscosité.

a. Exprimer la quantité de mouvement du fluide en fonction de ρ, L et du flux volumique $Q(t)$.

b. Montrer que : $\Delta P_i = I_{hd} \dfrac{dQ}{dt}$ et donner l'expression du paramètre I_{hd}.

c. Que représente physiquement I_{hd} ? Quel est son équivalent électrique ?

II.3.2 A $t = 0$, on applique une différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ à un fluide confiné dans un micro-canal de section $A = h \times w$ et de longueur L. On tient compte maintenant des effets de viscosité et on adoptera même en régime transitoire la résistance obtenue en **II.2.1**.

a. En raisonnant sur l'analogue électrique, écrire l'équation différentielle qui permet de décrire la dynamique du système.

b. Déterminer l'expression du temps caractéristique d'évolution τ_L.

c. Calculer numériquement τ_L pour un écoulement d'eau, avec $h = 10\,\mu$m. Pour des expériences d'une durée typique comprise entre la minute et l'heure, que peut-on en conclure des effets d'inertance ?

II.4. Compliance hydraulique

Dans un micro-canal l'interface de séparation entre eau et air n'est pas plan. Sa courbure est liée à une chute de pression, dite capillaire, au passage de l'interface. On admet, dans le cas d'un canal de section $h \times w (h \ll w)$, que cette différence de pression capillaire est donnée par $P_{\text{air}} - P_{\text{liquide}} = \Delta P_{\text{cap}} \simeq \dfrac{2\gamma}{h}$, où γ est appelé coefficient de tension superficielle de l'eau.

II.4.1 On considère le micro-canal de la figure 5. Une goutte d'eau est déposée à l'entrée, dans un réservoir suffisamment large pour que la hauteur du « réservoir » d'eau soit à peine supérieure à la hauteur du canal et que l'interface avec l'air soit quasiment plane.

a. Calculer numériquement ΔP_{cap} avec $h = 10\,\mu$m. Comparer ΔP_{cap} à la pression hydrostatique ΔP_{hyd} générée par le réservoir d'eau à l'entrée du canal. Expliquer qualitativement pourquoi l'eau imprègne spontanément le micro-canal.

On note $x(t)$ la longueur d'eau dans le canal à l'instant t.

b. Entre la surface quasi-immobile du réservoir et l'entrée du micro-canal, on peut négliger les effets de viscosité et de pesanteur. En utilisant la relation de Bernoulli, exprimer la différence entre la pression P_0 à la surface du réservoir et la pression P_A à l'entrée du micro-canal à l'aide de $\dot{x}(t)$.

c. On suppose que l'écoulement d'eau est laminaire et stationnaire dès son entrée dans le canal et suit la loi de Hagen-Poiseuille. Exprimer la différence de pression dans le micro-canal entre P_A à l'entrée et la pression P_0 de l'air après l'interface de droite (figure 5) à l'aide de $x, \dot{x}(t)$ et des constantes $r_e, A = wh$ et γ/h.

d. Déduire de ces deux expressions de $P_A - P_0$, l'équation différentielle que doit satisfaire $x(t)$.

e. On pose $T = t/\theta$ avec $\theta = \dfrac{\rho}{2 r_e A}$ et $Y = x/b$ avec $b = \dfrac{2}{r_e A}\sqrt{\dfrac{\rho\gamma}{h}}$. Montrer que T et Y sont adimensionnés. Montrer que $Y(T)$ vérifie l'équation différentielle

$$4\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 + 4Y\frac{dY}{dT} - 1 = 0\,.$$

f. Calculer numériquement θ et b.

g. Déterminer Y en fonction de T dans la limite $Y \ll 1$ puis dans la limite $Y \gg 1$. Dans chacun des cas, on négligera un des termes de l'équation différentielle et on vérifiera la validité de l'approximation effectuée.

h. Tracer l'allure du graphe de $Y(T)$. Pour quelle valeur de T les deux approximations se raccordent-elles ? Quel est le temps caractéristique correspondant. (On supposera le raccord en $Y = 1$)

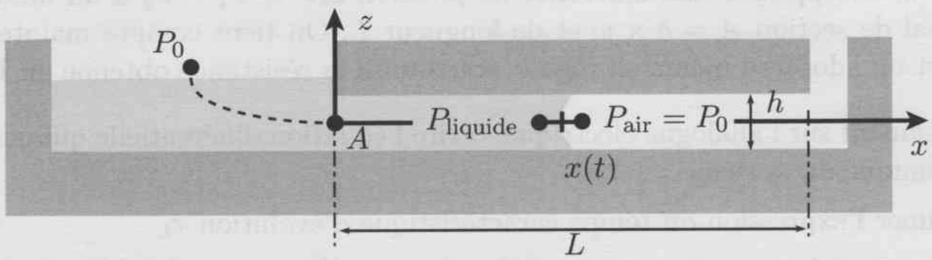


Figure 5 : Vue en coupe (verticale) d'un dispositif microfluidique où une goutte d'eau est déposée dans le réservoir à gauche.

II.4.2 Le micro-canal précédent, dont les parois sont imperméables à l'air, est maintenant bouché à son extrémité. Le volume initial d'air dans le canal est $V_0 = L \times w \times h$ et sa pression P_0. Comme à la question précédente, l'eau commence par imprégner le canal par capillarité. On traite l'air comme un gaz parfait et on suppose son évolution isotherme.

a. À l'instant t, montrer que le flux volumique $Q(t)$ s'écrit $Q(t) = C(P_{\text{air}})\dfrac{dP_{\text{air}}}{dt}$ et exprimer le coefficient $C(P_{\text{air}})$ en fonction de la pression P_{air} de l'air enclos et des données.

b. À l'équilibre, quelle sera la pression P_{eq} dans la poche d'air ? Exprimer et calculer numériquement la position relative x_{eq}/L de l'interface moyenne eau-air.

c. Quel est l'équivalent électrique de $C(P_{\text{air}})$ qu'on appelle plus généralement compliance hydraulique ? Dessiner le circuit électrique équivalent au micro-canal.

II.5. Actuateur de fluides diélectriques

Les parois du canal précédent, d'épaisseur e, sont recouvertes de deux électrodes (figure 6). En présence d'une différence de potentiel U aux bornes des électrodes, on repère la position de l'interface eau/air, qu'on considère plane, par la distance ξ par rapport à x_{eq}. Par souci de simplicité, on considère l'épaisseur e comme négligeable. On appelle ε_e et ε_a les permittivités relatives (constantes diélectriques) de l'eau et de l'air.

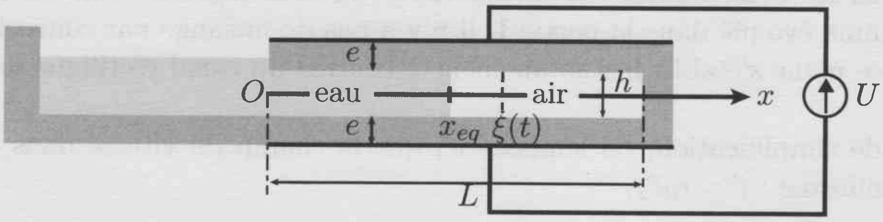


Figure 6 : Vue en coupe (verticale) d'un canal microfluidique bouché à l'extrémité droite et dont les parois supérieures et inférieures, métallisées sont soumises à une différence de potentiel U.

II.5.1 Donner l'expression de la capacité équivalente C du condensateur plan que constitue le micro-canal rempli d'air et de liquide, en négligeant la courbure de l'interface eau/air, en fonction des différentes longueurs du problème et des permittivités relatives.

II.5.2 Donner l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée $W(\xi)$ en fonction de U et de C.

II.5.3 Soit $\vec{F}_{el}$ la force électrostatique totale qui agit sur le liquide. A potentiel U fixé, elle est donnée par $\vec{F}_{el} = \overrightarrow{\text{grad}}_{\xi} W(\xi)$. Calculer $\vec{F}_{el}$ et préciser sa direction. En déduire la modification de pression P_{el} qui s'exerce sur l'air du micro-canal.

II.5.4 Déterminer ξ_{eq} la nouvelle position d'équilibre de l'interface eau-air en présence de la différence de potentiel U en fonction de $L, P_0, \Delta P_{\text{cap}}$ et P_{el}. Dans l'hypothèse où x_{eq} et ξ_{eq} sont petits devant L, montrer que : $\xi_{eq} \simeq \dfrac{P_{el}}{P_0} L$.

II.5.5 Calculer numériquement ξ_{eq} avec $h = 10\,\mu$m, $L = 1$ mm, $U = 10$ V, $\varepsilon_e = 80$, $\varepsilon_a = 1$. Est-ce un dispositif de déplacement de fluides efficace ? Quelles sont les limitations techniques à l'application d'une tension plus élevée ?

X PC 08

I1.1) Terme de gauche : accélération × masse de l'unité de volume de fluide.

$\rho\vec{g}$: poids de l'unité de volume de fluide

$-\vec{\mathrm{grad}}\,P$: résultante des forces de pression sur l'unité de volume de fluide

$\eta\Delta\vec{v}$: résultante des forces de viscosité sur l'unité de volume de fluide

I1.2) $Re = \frac{\text{terme d'accélération convective}}{\text{terme de viscosité}}$

$$Re = \frac{\rho V^2}{L\,\eta V/L^2} \longrightarrow \boxed{Re = \frac{\rho V L}{\eta}}$$

où V est l'o.d.g de la vitesse qui varie sur une dimension caractéristique L.

Ici V varie sur la largeur w mais aussi sur la hauteur h, passant de V au centre à 0 sur les bords.

c'est la plus petite dimension qui limite Re ici h donc $\boxed{Re = \frac{\rho V h}{\eta}}$ nb de Reynolds sur la dimension z

AN $Re = \frac{10^3 \times 100\times10^{-6} \times 10\times10^{-6}}{10^{-3}} = 10^{-3}$

$R_e \ll 1$ conduit à un écoulement laminaire

Rq : selon y $w = 10h$ donc $Re = 10^{-2}$ encore laminaire

I1.3) Incompressible $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{avec } \vec{v} /\!/ \vec{e}_x : \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

L'hypothèse énoncée : v ne dépend pas de y

Donc v ne dépend que de z (et de t).

I1.4) Equation de Navier-Stokes projetée sur x

En régime stationnaire : v ne dépend pas de t

$$\rightarrow \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

avec $v_x(z) \rightarrow \boxed{0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}$

Comme v_x ne dépend que de z, alors $\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$ aussi

donc $\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} \text{ est indépendant de } x}$

Ainsi $\Delta P = P(0) - P(L)$ $\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L}}$ et du coup $\boxed{\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta P}{L}}$

I1.5) Intégrons $\eta\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\Delta P}{L}z + ct_1$

Intégrons $\eta v_x = -\frac{\Delta P}{L}\frac{z^2}{2} + ct_1 z + ct_2$

Ça ne glisse pas sur les parois, càd en $z = \pm\frac{h}{2}$

donc $0 = -\frac{\Delta P}{L}\frac{h^2}{8} \pm ct_1\frac{h}{2} + ct_2 \Rightarrow ct_1 = 0$, $ct_2 = +\frac{\Delta P}{L}\frac{h^2}{8}$

$$\boxed{v_x = \frac{-\Delta P}{2\eta L}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)}$$

En $z = 0$ $\boxed{V_{max} = \frac{\Delta P h^2}{8\eta L}}$

Rq : il faut $\Delta P > 0$ pour obtenir V_{max} dans le sens x

Vitesse moyenne : $V_0 = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v(z)\,dz$

$$V_0 = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{\Delta P}{2\eta L}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)dz = -\frac{\Delta P}{2\eta L h}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{h^2}{4}z\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{h^2\Delta P}{12\eta L}}$$

I1.6) $Q = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v\,dy\,dz = w\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{\Delta P}{2\eta L}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)dz$

$$\boxed{Q = w V_0 h = \frac{h^3 w \Delta P}{12\eta L}}$$

I1.7) $\Delta P = \frac{Q\,12\eta L}{h^3 w} = \frac{10^{-12}\times 12\times10^{-3}\times10^{-3}}{10^3\times10^{-6\times3}\times 100\times10^{-6}}$

$\Delta P = 120$ Pa $\quad (P(0) > P(L))$

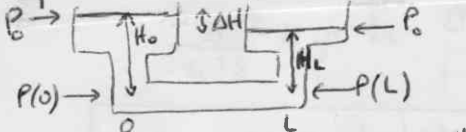
Si $h = 100\,\mu m$, càd 10 fois plus grand alors ΔP est mille fois plus petit

Statique des fluides : $\Delta P = \rho g \Delta H$

$\Delta H = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{120}{10^3 \times 9{,}8} = 0{,}0122$ m $= 12{,}2$ mm

Si $h = 100\,\mu m$, alors ΔH (proportionnel à ΔP) est mille fois plus petit : $12{,}2.10^{-3}$ mm serait beaucoup plus difficile à lire.

Rq sur la statique des fluides :



A la surface des liquides règne la pression atmosphérique P_0

$P(0) - P_0 = \rho g H_0 \qquad P(L) - P_0 = \rho g H_L$

Soustraction : $P(0) - P(L) = \rho g (H_0 - H_L) = \rho g \Delta H$

soit $\Delta P = \rho g \Delta H$

I2.1) Reprendre I1.6) $Q_1 = \frac{h^3\Delta P\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)w}{12 L\,\eta_1}$

$$Q_2 = \frac{h^3\Delta P\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)w}{12 L\,\eta_2}$$

En divisant $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\alpha+1}{1-\alpha}\frac{\eta_2}{\eta_1}$ d'où $\boxed{\alpha = \frac{\eta_1 Q_1 - \eta_2 Q_2}{\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_2}}$

I1.2) $\alpha = \frac{50\,10^{-3} - 10^{-1}\times1}{50.10^{-3} + 10^{-1}\times1} = -0{,}33$ L'eau occupe un plus petit espace que l'huile

II 1.1) Un courant électrique est un transfert de charges par unité de temps.

Un flux volumique est un transfert de volume par unité de temps, d'où analogie.

Le volume déplacé pendant dt est $\int \vec{v}.\vec{dS}\, dt$

d'où le flux volumique $Q = \int \vec{v}.\vec{dS}$

La vitesse moyenne est définie par $V_0 = \frac{1}{A}\int \vec{v}.\vec{dS}$

II 1.2) La puissance est un produit force.vitesse

Ici la force ne peut être que de pression.

On a ΔP entre 0 et L sur la surface A $\quad \xrightarrow{P(0)}|A \quad \rightarrow \vec{e}_x \quad \xleftarrow{P(L)}$ (0, L)

La force est donc $\Delta P.A$ dans le sens $\vec{e}_x$

La vitesse moyenne est V_0

Donc la puissance associée est $P_m = \Delta P.A.V_0$

Comme $Q = V_0 A$ on a $\boxed{P_m = Q\Delta P}$

En électricité la puissance $P_{el} = UI$

L'analogue de Q est I

donc l'analogue de ΔP est U différence de potentiel.

II 2.1) Résistance électrique : $R = \frac{U}{I}$

Analogue résistance hydraulique : $\boxed{R_{hd} = \frac{\Delta P}{Q}}$

cf (I 1.6) $\Rightarrow \boxed{R_{hd} = \frac{12\eta L}{h^3 w}}$

II 2.2) On remarque que $r_e = \frac{R_{hd\,e}}{L}$

r_e représente la résistance hydraulique due à l'eau par unité de longueur du canal.

II 2.3) Il faut compter la résistance de l'eau et celle de l'huile r_e et r_h

$$\Delta P = Q_0\left[r_e(n\lambda - nL_g) + r_h n L_g\right]$$

avec $\boxed{r_e = \frac{12\eta_e}{h^3 w}}$ et $r_h = \frac{12\eta_h}{h^3 w}$

soit $\boxed{\Delta P = n\frac{Q_0 12}{h^3 w}\left[\eta_e(\lambda - L_g) + \eta_h L_g\right]}$

si $\eta_e \ll \eta_h$ alors $\Delta P \simeq \frac{nQ_0 12}{h^3 w}\left[\eta_h L_g + \eta_e\lambda\right]$

ou encore $\boxed{\Delta P \simeq nQ_0 r_e\left[\lambda + \frac{\eta_h}{\eta_e}L_g\right]}$

II 2.4) Loi des noeuds : $I_0 = I_1 + I_2$

II 2.5) Si au départ les canaux sont remplis d'eau pour le m̂ ΔP dans les 2 bras on a

$$Q_1 = \frac{h^3 w \Delta P}{12\eta_e L_1} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{h^3 w\Delta P}{12\eta_e L_2} \quad (\text{cf I.16})$$

donc $Q_1 L_1 = Q_2 L_2$

– Comme $L_1 < L_2$, $Q_1 > Q_2$

les gouttes d'huile vont suivre le canal 1

II 2.6) Maintenant que le canal 1 est parcouru par des gouttes d'huile (en régime stationnaire), mais pas le canal 2 on a :

$\Delta P \simeq n_1 Q_1 r_e\left[\lambda + \frac{\eta_h}{\eta_e}L_g\right]$ pour le canal 1

$\Delta P = \frac{12\eta_e L_2 Q_2}{h^3 w}$ pour le canal 2

soit $\Delta P = L_2 r_e Q_2$

C'est le m̂ ΔP dans les 2 canaux donc

$$n_1 Q_1 r_e\left[\lambda + \frac{\eta_h}{\eta_e}L_g\right] = L_2 r_e Q_2$$

avec $n_1\lambda = L_1$; $Q_1 L_1\left[1 + \frac{\eta_h}{\eta_e}\frac{L_g}{\lambda}\right] = Q_2 L_2$

Il faut toujours $Q_1 \geq Q_2$ pour que le tri des gouttes d'huile soit le même, càd canal 1

soit $L_2 > L_1\left(1 + \frac{\eta_h}{\eta_e}\frac{L_g}{\lambda}\right)$

d'où $\boxed{\frac{L_2 - L_1}{L_1} > \frac{\eta_h}{\eta_e}\frac{L_g}{\lambda}}$

II 3.1) a) Par analyse dimensionnelle : $\rho Q \sim \frac{\text{masse}}{\text{temps}}$

donc $\rho Q L \sim$ masse × vitesse ∼ quantité de mouvement

d'où $\boxed{\text{Quantité de mouvement} = \rho Q L}$

II 3.1) b) $\frac{d(\text{quant. mouv}^t)}{dt} = \Sigma F =$ Forces pressantes selon l'axe x

Projeté sur $\vec{e}_x$: $\rho\dot{Q}L = \Delta P_i . A$

donc $\boxed{\Delta P_i = \frac{\rho L}{A}\dot{Q}}$ $\quad \boxed{I_{hd} = \frac{\rho L}{A}}$

II 3.1) c) Equivalent électrique : $\Delta P \rightarrow U$ d.d.p. ; $Q \rightarrow I$

$\frac{\Delta P_i}{\dot{Q}}$ est équivalent à $\frac{U}{\dot{I}}$

En électricité on trouve $u = L\dot{i}$ aux bornes de L

L'équivalent électrique de $\frac{\Delta P_i}{\dot{Q}} = I_{hd}$ est l'inductance

I_{hd} est donc l'inductance hydraulique, appelée inertance hydraulique d'après le titre du paragraphe

II 3.2.a) En électricité : $u = L\frac{di}{dt} + Ri$

Son analogue hydraulique : $\boxed{\Delta P = I_{hd}\dot{Q} + R_{hd}Q}$

II 3.2.b) $\boxed{\tau_L = \frac{I_{hd}}{R_{hd}}}$ soit $\boxed{\tau_L = \frac{\rho L}{A}\frac{h^3 w}{12\eta L} = \frac{\rho h^2}{12\eta}}$

II 3.2.c) AN $\tau_L = \frac{10^3 \times 10^2 \times 10^{-6\times 2}}{12\times 10^{-3}} = 8{,}3\ \mu s$

Pour des durées $\gg \tau_L$ on atteint aussitôt le régime permanent, donc $\dot{Q} \simeq 0$ et les effets d'inertance sont négligeables.

II 4.1.a) $\Delta P_{cal} = \frac{2\gamma}{h} = \frac{2\times 7\times 10^{-2}}{10.10^{-6}} = \underline{0,14 \text{ bar}}$

$$\frac{\Delta P_{cal}}{\Delta P_{hyd}} = \frac{0,14}{\rho g h} = \frac{0,14\times 10^{5}}{10^{3}\times 9,8\times 10\times 10^{-6}} \gg 1$$

La différence de pression hydrostatique est donc quasi-négligeable ; à gauche la pression est donc 1 bar, mais à droite de l'interface on a $(1-0,14) = 0,86$ bar. Cette chute de pression provoque une aspiration de l'eau qui imprègne ainsi spontanément le micro-canal.

II 4.1.b) Relation de Bernoulli en négligeant la vitesse de la surface de l'eau dans le grand réservoir : $P_0 + 0 = P_A + \frac{1}{2}\rho \dot{x}^2$

$$\boxed{P_0 - P_A = \frac{1}{2}\rho\dot{x}^2}$$

II 4.1.c)

A eau P_{x^-} | P_0 air

0 interface x

Entre A et x^- situé à gauche de l'interface on a la loi de Hagen-Poiseuille : $P_A - P_{x^-} = \frac{12\eta_e x}{h^3 w} Q$ (cf I.1.6)

avec le débit volumique $Q = \dot{x} A$

d'où $P_A - P_{x^-} = \frac{12\eta_e x \dot{x} A}{h^3 w}$ or $r_e = \frac{12\eta_e}{h^3 w}$ (cf II 2.3)

donc $\boxed{P_A - P_{x^-} = r_e x \dot{x} A}$

La différence de pression de part et d'autre de l'interface est donnée par l'énoncé (due à la courbure de l'interface) $P_0 - P_{x^-} = \frac{2\gamma}{h}$ (en x^+ la pression est P_0)

On soustrait pour éliminer P_{x^-} :

$$\boxed{P_0 - P_A = \frac{2\gamma}{h} - r_e x \dot{x} A}$$

II 4.1.d) II4.1.b et II4.1.c $\rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}\rho\dot{x}^2 = \frac{2\gamma}{h} - r_e x\dot{x} A}$

II 4.1.e) $\theta \doteq \frac{\rho}{2 r_e A}$ avec $r_e = \frac{R_{H}}{L} = \frac{\Delta P}{QL} \sim \frac{F}{QLA}$

d'où $\theta \sim \frac{M T^2 L^3 L}{L^3 M L T} \sim T$ — θ homogène à temps, $\frac{t}{\theta}$ adimensionnée

$b \doteq \frac{2}{r_e A}\sqrt{\frac{\rho\gamma}{h}} \sim \frac{QL}{F}\sqrt{\frac{\rho \Delta P L}{L}} \sim \frac{QL}{F}\sqrt{\frac{\rho F}{A}} \sim \frac{L^3 L t^2}{t M L}\sqrt{\frac{\rho F}{A}}$

$b \sim \frac{L^3 t}{M}\sqrt{\frac{M}{L^3}\frac{M L t^{-2}}{L^2}} \sim L$ — b homogène à longueur, $\frac{x}{b}$ adimensionnée

$Y \doteq \frac{x}{b}$ et $T = \frac{t}{\theta}$ donc $\frac{dY}{dT} = \frac{dY}{dx}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dT}$

soit $\boxed{\frac{dY}{dT} = \frac{1}{b}\dot{x}\theta}$ soit $\boxed{\dot{x} = \frac{b}{\theta}\frac{dY}{dT}}$

En remplaçant $\dot{x}$ par $\frac{b}{\theta}\frac{dY}{dT}$ on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho\frac{b^2}{\theta^2}\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 = \frac{2\gamma}{h} - r_e A\, bY\frac{b}{\theta}\frac{dY}{dT}$$

En multipliant par $8\frac{\theta^2}{\rho b^2}$, remarquant que $r_e A\frac{b^2}{\theta}\times\frac{8\theta^2}{\rho b^2} = \frac{r_e A 8\theta}{\rho} = 4$

et que $\frac{2\gamma}{h}\times\frac{8\theta^2}{\rho b^2} = \frac{2\gamma\, 8\rho^2}{h\, 4r_e^2A^2\rho\, 4\rho\gamma}\, r_e^2A^2h = 1$

$$\boxed{4\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 + 4Y\frac{dY}{dT} - 1 = 0}$$

II 4.1.f) AN : $\theta \doteq \frac{\rho}{2r_eA} = \frac{10^3\times 10\times 10^{-6\times 3}\times 100\times 10^{-6}}{2\times 12\times 10^{-3}\times 10\times 10^{-6}\times 100\times 10^{-6}}$

$r_e = \frac{12\eta_e}{h^3 w}$ $\theta = 4\ \mu s$

$b \doteq \frac{2}{r_eA}\sqrt{\frac{\rho\gamma}{h}} = \frac{h^3 w}{6\eta_e h w}\sqrt{\frac{\rho\gamma}{h}} = \frac{h^2}{6\eta_e}\sqrt{\frac{\rho\gamma}{h}} = \frac{10^{-10}}{6.10^{-3}}\sqrt{\frac{10^3\times 7.10^{-2}}{10.10^{-6}}}$

$\underline{b = 0,44.10^{-4}\ m}$

II.4.1.g) Cas où $\left(\frac{dY}{dT}\right)^2$ est le terme à négliger :

alors $4Y\frac{dY}{dT} = 1$ soit $2Y^2 = T + cte_1$

Cas où $Y\frac{dY}{dT}$ est le terme à négliger :

alors $4\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 = 1$ soit $\frac{dY}{dT} = \frac{1}{2}$ soit $Y = \frac{T}{2} + cte_2$

Or $\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 \ll Y\frac{dY}{dT} \iff \frac{dY}{dT} \ll Y$

Le cas correspond à $2Y^2 = T + cte_1$ donc à $\frac{dY}{dT} = \frac{1}{4Y}$

Il faut donc $\frac{1}{4Y} \ll Y$ càd $Y \gg \frac{1}{2}$

Comme $2Y^2 = T + cte_1$, cela donne aussi $T \gg \frac{1}{2}$

L'autre cas correspond donc à l'inverse.

Le début coïncide avec $T \ll 1$ (et $Y \ll 1$)

donc le mouvement commence avec l'approximation

$Y\frac{dY}{dT} \ll \left(\frac{dY}{dT}\right)^2 \rightarrow Y = \frac{T}{2} + cte_2$

condition initiale : à $t=0$ (càd $T=0$) $x=0$ (càd $Y=0$)

d'où $cte_2 = 0$ et $Y = \frac{T}{2}$

Ainsi $\boxed{\text{pour } Y \ll 1 : Y = \frac{T}{2}}$

Du coup $\boxed{\text{pour } Y \gg 1 : 2Y^2 = T + cte_1}$

Validité des approximations :

si $Y \ll 1$ alors $Y = \frac{T}{2}$, $\frac{dY}{dT} = \frac{1}{2}$: on a bien $Y\frac{dY}{dT} \ll \left(\frac{dY}{dT}\right)^2$ (car $Y \ll 1$)

si $Y \gg 1$ alors $2Y^2 = T + cte_1$, $\frac{dY}{dT} = \frac{1}{2Y}$: on a bien $Y\frac{dY}{dT} \gg \left(\frac{dY}{dT}\right)^2$

II 4.1.h) On suppose le raccord en $Y = 1$

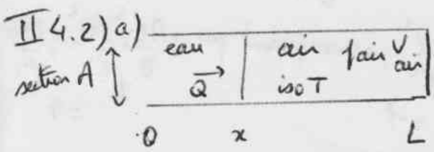
On calcule alors $cte_1 = 2\times 1 - 2\times 1 = 0$

ainsi $\boxed{\text{pour } Y \gg 1 \quad 2Y^2 = T}$

le raccord $Y = 1$ correspond à $T = 2$

Le temps caractéristique correspondant est alors $\frac{t}{\theta} = 2$ soit $t = 2\theta = 8\ \mu s$ (cf AN de θ en II4.1.f)

II4.2) a)



$\boxed{Q = A\dot{x}}$

Pour l'air enfermé, initialement occupant tout le volume (de 0 à L), isotherme :

$$p_{air}(L-x)A = p_0 L A$$

on tire $x = L - \frac{p_0 L}{p_{air}}$:

on dérive : $\dot{x} = +\frac{L}{p_{air}^2} p_0 \frac{dp_{air}}{dt}$ d'où $Q = \frac{AL p_0}{p_{air}^2}\frac{dp_{air}}{dt}$

d'où $\boxed{Q = C(p_{air})\frac{dp_{air}}{dt}}$ avec $\boxed{C(p_{air}) = \frac{AL p_0}{p_{air}^2}}$

II4.2.b) L'équilibre correspond à l'égalité de pression de part et d'autre de l'interface compte tenu de l'effet de courbure

p_{liq}) p_{eq} $\qquad p_{eq} - p_{liq} = \frac{2\gamma}{h}$

Or on a estimé en II4.1.a) que la différence de pression ΔP_{hyd} due à la différence d'altitude était négligeable par rapport à celle ΔP_{cal} due à la courbure de l'interface. Ceci permet d'approcher la valeur p_{liq} à p_0 de la surface de l'eau.

alors $p_{eq} - p_0 = \frac{2\gamma}{h}$ $\qquad \boxed{p_{eq} = p_0 + \frac{2\gamma}{h}}$

AN : $p_{eq} = 10^5 + \frac{2\times 7\times 10^{-2}}{10\times 10^{-6}} = 1{,}14$ bar

Dans ce cas la loi du GP donne : (isotherme)

$$p_{eq} A (L - x_{eq}) = p_0 A L$$

$x_{eq} = L\left(1 - \frac{p_0}{p_{eq}}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{x_{eq}}{L} = 1 - \frac{p_0}{p_{eq}}}$

AN $\frac{x_{eq}}{L} = 1 - \frac{1}{1{,}14} = 0{,}123$

II4.2.c) $Q = C\frac{dp}{dt}$ avec $Q \longleftrightarrow I$, $dp \longleftrightarrow du$

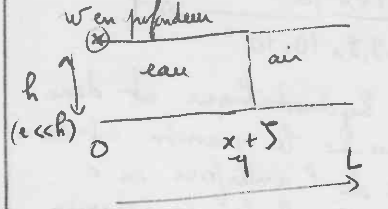
donc $C \longleftrightarrow \frac{Idt}{du} = \frac{dq}{du}$

on reconnaît $dq = C\,du$ C capacité.

C (Pair) a comme équivalent électrique la capacité d'un condensateur

schéma

II5.1) Il s'agit de 2 condensateurs en parallèle : les capacités s'ajoutent



$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 w}{h}\left(\varepsilon_e(x_{eq}+\xi) + \varepsilon_a(L-x_{eq}-\xi)\right)}$$

II5.2) $\boxed{W = \frac{1}{2}CU^2}$

II5.3) $\boxed{F_{el} = \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{1}{2}U^2\frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{2}U^2\frac{\varepsilon_0 w}{h}(\varepsilon_e - \varepsilon_a)}$

$\vec{F}_{el} \parallel \vec{e}_x$

La modification de pression qui en résulte est

$$\boxed{P_{el} = \frac{F_{el}}{hw} = \frac{U^2\varepsilon_0}{2h^2}(\varepsilon_e - \varepsilon_a)}$$

II.5.4) On avait avant l'établissement de U (cf II4.2 b)

$$p_{eq}(L - x_{eq}) = p_0 L$$

soit puisque $\Delta P_{cap} = p_{eq} - p_0$ $\qquad (p_0 + \Delta P_{cap})(L - x_{eq}) = p_0 L$

Avec U établi on a une autre pression $p_{eq} + P_{el}$ et une nouvelle position $x_{eq} + \xi_{eq}$

d'où $(p_{eq} + P_{el})(L - x_{eq} - \xi_{eq}) = p_0 L$

soit $(p_0 + \Delta P_{cap} + P_{el})(L - x_{eq} - \xi_{eq}) = p_0 L$

d'où $\xi_{eq} = -x_{eq} + L - \frac{p_0 L}{p_0 + \Delta P_{cap} + P_{el}}$

avec $x_{eq} = L - \frac{p_0 L}{p_0 + \Delta P_{cap}}$

donc $\boxed{\xi_{eq} = \frac{p_0 L}{p_0 + \Delta P_{cap}} - \frac{p_0 L}{p_0 + \Delta P_{cap} + P_{el}}}$

Au même dénominateur : $\xi_{eq} = \frac{p_0 P_{el} L}{(p_0 + \Delta P_{cap})(p_0 + \Delta P_{cap} + P_{el})}$

si x_{eq} et $\xi_{eq} \ll L$ alors ΔP_{cap} et $P_{el} \ll P_0$

d'où $\boxed{\xi_{eq} \simeq \frac{P_{el} L}{P_0}}$

II5.5) AN $\xi_{eq} = \frac{U^2\varepsilon_0(\varepsilon_e - \varepsilon_a)}{2h^2}\frac{L}{P_0} = \frac{10^2\times 8{,}85\cdot 10^{-12}(80-1)}{2\times 10^{-5\times 2}}\frac{10^{-3}}{10^5}$

$\xi_{eq} = 3\ \mu m$

Dispositif relativement efficace mais la tension de 10 V sur une hauteur de 10 µm donne $10^6\ V\,m^{-1}$ comme champ ce qui est fort et risque un courant de fuite (champ disruptif dans l'air $3.10^6\ V\,m^{-1}$)