CHAUFFAGE D'UNE ECOLE

On étudie le chauffage d'une école pendant une journée d'hiver. On appelle T_{ext} la température de l'air à l'extérieur de l'école. On suppose qu'à chaque instant, toute l'école est à la même température T.

Quand l'école reçoit une quantité de chaleur élémentaire δQ, sa température T varie de dT, suivant la relation :

$$\delta Q = C\,dT \,,$$

C étant la capacité thermique de toute l'école.

On suppose que la chaleur perdue par l'école (à cause des déperditions thermiques à travers les murs, le toit ...) pendant la durée dt est égale à :

$$\delta Q_{perdue} = a\,C\,(T - T_{ext})\,dt \,,$$

a étant une constante.

On donne : $T_{ext} = 263$ K ; $C = 7{,}6.10^{7}$ J.K^{-1} ; $a = 7{,}9.10^{-5}$ s^{-1}.

A. - 1/ On arrête le chauffage de l'école à l'instant $t = 0$, la température de l'école étant $T_1 = 293$ K.

a) En faisant un bilan thermique, établir l'équation différentielle vérifiée par T (fonction du temps t).

b) Déterminer la température T de l'école à un instant t quelconque.

c) Calculer T à l'instant $t_1 = 3$ heures.

2/ On suppose maintenant qu'à l'instant $t = 0$, la température de l'école est $T_2 = 275$ K et le chauffage de l'école est mis en fonctionnement ; les radiateurs dégagent une puissance thermique $\mathcal{P} = 210$ kW constante au cours du temps.

a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par T (fonction du temps t).

b) Déterminer la température T de l'école à un instant t quelconque.

c) Calculer l'instant t_2 pour lequel la température de l'école est égale à 293 K.

A.1.a. $p = cte \Rightarrow dH = \delta Q$ pour le système {école}

soit $\boxed{C\,dT = -aC(T - T_{ext})\,dt}$

b. Séparer les variables T et t puis intégrer $\Rightarrow \ln \dfrac{T - T_{ext}}{T_1 - T_{ext}} = -at$

$$\boxed{T = T_{ext} + (T_1 - T_{ext})\,e^{-at}}$$

c. $t_1 = 3\,h \Rightarrow \underline{T = 275{,}8\ K}$

A.2.a. idem A.1.a. avec en plus une quantité de chaleur apportée par le chauffage : $P\,dt$ pendant dt

$$\boxed{C\,dT = -aC(T - T_{ext})\,dt + P\,dt}$$

b. Division par dt : $\dot{T} + a(T - T_{ext}) = \dfrac{P}{C}$

ou bien $(T - T_{ext})^{\circ} + a(T - T_{ext}) = \dfrac{P}{C}$

Solution homogène : $T - T_{ext} = A\,e^{-at}$

Solution particulière : $T - T_{ext} = \dfrac{P}{aC}$

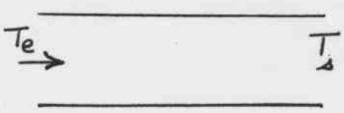
Solution globale : $T - T_{ext} = A\,e^{-at} + \dfrac{P}{aC}$

Conditions initiales : à $t = 0$, $T - T_{ext} = T_2 - T_{ext}$

d'où $\boxed{T - T_{ext} = \left(T_2 - T_{ext} - \dfrac{P}{aC}\right)e^{-at} + \dfrac{P}{aC}}$

c. $\underline{t} = -\dfrac{1}{a} \ln \left(\dfrac{T - T_{ext} - \frac{P}{aC}}{T_2 - T_{ext} - \frac{P}{aC}} \right) = \underline{19377\ s = 5{,}38\ h}$

La question 5) est indépendante.

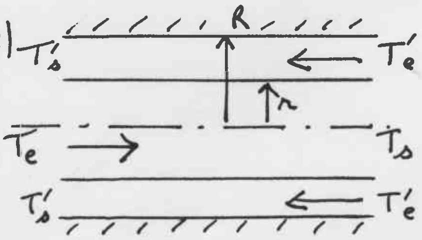


A pession constante, de l'eau, de capacité calorifique massique c'_{eau}, circule dans un tube cylindrique de rayon r, avec un débit massique D'_{eau} constant.

La longueur du tube est suffisante pour pouvoir considérer en amont la température T_e et en aval la température T_s ; $T_e \neq T_s$ du fait d'un transfert thermique par la surface latérale. On suppose le régime permanent.

1) Faire des schémas montrant le déplacement du liquide entre t et $t+dt$.
Exprimer la chaleur δQ échangée par l'eau entre ces 2 instants, en fonction des données.
2) L'eau a la masse volumique ρ_{eau} et la vitesse d'écoulement v_{eau}.
Exprimer le débit massique D'_{eau} en fonction des données.
3) Calculer la puissance thermique échangée à travers la surface latérale.
A.N : $c'_{eau} = 4{,}18\ J\,g^{-1}\,°c^{-1}$ $T_e = 50°c$ $T_s = 20°c$ $v_{eau} = 30\ cm.s^{-1}$ $r = 5\,cm$

4)



Le tube précédent est entouré d'un autre tube cylindrique de rayon R, de même axe.
Un liquide de capacité calorifique massique c'_{liq}, de masse volumique ρ_{liq} circule en sens inverse entre les 2 tubes, à la vitesse v_{liq} avec un débit massique D'_{liq}.
Les températures d'entrée et de sortie sont T'_e et T'_s.

Le gros tube est parfaitement calorifugé. Le régime est permanent.
Par un bilan énergétique simple, trouver une relation entre D'_{eau} D'_{liq} c'_{eau} c'_{liq} et les températures

5) Soit un tube de rayon r', de longueur l, siège de réactions exothermiques de puissance volumique thermique P supposée uniforme. La pression est constante.
Soit T la température de la matière dans le tube supposée uniforme
Soit ρ sa masse volumique et c' sa capacité calorifique massique.
a) Que signifie "uniforme" ? Peut-on avoir une t° uniforme qui varie avec le temps ?
b) Ecrire l'équation différentielle déduite d'un simple bilan énergétique en supposant aucune perte dans le milieu ambiant.
c) Résoudre et exprimer $T(t)$ en supposant T_0 la température initiale
A.N : $\rho = 2.10^3\ kg/m^3$ $c' = 8000\ J.kg^{-1}.K^{-1}$ $P = 160\ kW/m^3$ $r' = 10\,cm$ $l = 1\,m$
Calculer la variation de t° au bout de 1 heure.
d) En réalité, il y a des pertes de chaleur par la surface latérale de la forme
$\delta Q_{perte} = \pm\, \alpha\, S_{lat}\,(T - T_0)\,dt$ α constante > 0 ; S_{lat} : surface latérale
T_0 t° du milieu ambiant extérieur au tube
Exprimer la t° T_{stable} du tube en régime permanent.
En admettant que $T_{stable} = T_0 + 50°c$ calculer α. Préciser son unité.
e) En régime non permanent, écrire l'équation différentielle de la température
La résoudre sous la forme d'une relation entre T et t.
En déduire $T - T_0$ en fonction de $(T_{stable} - T_0)$ ρ r' c' t
Tracer l'allure de la courbe $(T - T_0)(t)$
Trouver un temps caractéristique de réponse du système τ
Calculer τ

1) à t

T_e

à $t+dt$

entre t et $t+dt$, à p constante

$$\delta Q = dH = \delta H_s - \delta H_e = \delta m\, c'_{eau}(T_s - T_e)$$

$$D' = \frac{\delta m}{dt}$$

$$\boxed{\delta Q = D'_{eau} c'_{eau}(T_s - T_e)\, dt}$$

2) $$\boxed{D'_{eau} = \frac{\delta m}{dt} = \frac{\rho_{eau} S\, v_{eau}\, dt}{dt} = \rho_{eau} S\, v_{eau} = \rho_{eau} \pi r^2 v_{eau}}$$

3) $$\boxed{\mathcal{P} \doteq \frac{|\delta Q|}{dt} = D'_{eau} c'_{eau}(T_s - T_e) = \rho_{eau} \pi r^2 v_{eau} c'_{eau} (T_s - T_e)}$$

$$\mathcal{P} = 10^3 \pi \times (5 \times 10^{-2})^2 \; 0{,}3 \times 4{,}18 \times 10^3 (20-50) = \underline{295{,}5\,\text{kW}}$$

$\rho_{eau} = 1000\,\text{kg/m}^3$

4) Bilan pendant dt, à p constante, pour le syst {eau et liq} circulant pendant dt

$$\delta m_{eau}\, c'_{eau}\,(T_s - T_e) + \delta m_{liq}\, c'_{liq}\,(T'_s - T'_e) = 0$$

$$\boxed{D'_{eau}\, c'_{eau}\,(T_s - T_e) + D'_{liq}\, c'_{liq}\,(T'_s - T'_e) = 0}$$

5) a) uniforme : $t°$ identique dans tout le tube.
on peut avoir une $t°$ identique dans tout le tube, qui varie avec t.

b) A p constante $\qquad \delta Q = m c'\, dT$

$$\boxed{\pi r^2 \ell P\, dt = \rho \pi r^2 \ell c'\, dT} \iff \boxed{P\,dt = \rho c'\, dT}$$

c) $\cancel{\pi r^2} \ell P t = \rho \cancel{\pi r^2} \ell c' (T - T_0)$ $\qquad \boxed{T = T_0 + \frac{Pt}{\rho c'}}$

AN $\quad \underline{T - T_0} = \frac{Pt}{\rho c'} = \frac{160 \times 10^3 \times 3600}{2000 \times 8000} = 36\,°C$

d) En régime permanent, T est constante

$$\pi r^2 \ell P\, dt = \alpha S_{lat} (T_{stable} - T_0)\, dt \implies \boxed{T_{stable} = T_0 + \frac{P \pi r^2 \ell}{\alpha S_{lat}} = T_0 + \frac{P r'}{\alpha 2}}$$

$$\boxed{\alpha_? = \frac{P \pi r^2 \ell}{S_{lat}(T_{stable} - T_0)} = \frac{P r'}{2(T_{stab} - T_0)}} = \frac{160\,000 \times 0{,}1}{2 \cdot 50} = \underline{160} \quad \text{J.m}^{-2}\,\text{K}^{-1}\,\text{s}^{-1}$$

$\underline{\text{W.m}^{-2}\,\text{K}^{-1}}$

e) $$m c'\, dT = \pi r^2 \ell P\, dt - \alpha S_{lat} (T - T_0)\, dt$$

$$\rho \pi r^2 \ell c'\, dT = \pi r^2 \ell P\, dt - \alpha\, 2\pi r' \ell\, (T - T_0)\, dt$$

$$\boxed{\rho r' c'\, dT = [r' P - \alpha 2 (T - T_0)]\, dt}$$

... / ...

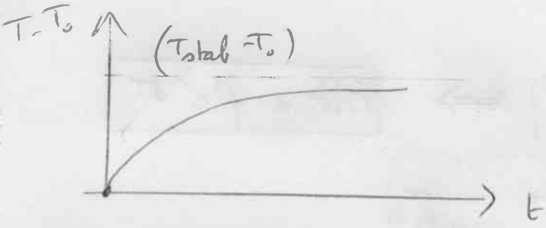
$$\frac{\rho r' c' \, dT}{r'P - \alpha\, 2\,(T - T_0)} = dt$$

$$-\left[\frac{\ln\left(Pr' - 2\alpha(T - T_0)\right)}{2\alpha}\right]_{T_0}^{T} = \frac{t}{\rho r' c'}$$

$$\ln\left(\frac{Pr' - 2\alpha(T - T_0)}{Pr'}\right) = -\frac{2\alpha t}{\rho r' c'} \qquad 1 - \frac{2\alpha(T - T_0)}{Pr'} = e^{-\frac{2\alpha t}{\rho r' c'}}$$

$$T - T_0 = \frac{Pr'}{2\alpha}\left(1 - e^{-\frac{2t\alpha}{\rho r' c'}}\right)$$

$$\boxed{T - T_0 = \left(T_{stable} - T_0\right)\left(1 - e^{-\frac{2t\alpha}{\rho r' c'}}\right)}$$



$$\boxed{\tau = \frac{\rho r' c'}{2\alpha}} = \frac{2000 \times 0{,}1 \times 8000}{2 \times 160} = 5000\ \text{s}$$

$$= 1^h\, 23\ \text{min}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho c' (T_{stab} - T_0)}{P}}$$