

### Données numériques

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Accélération du champ de pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Vitesse de la lumière :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

### Formulaire

Pour un champ vectoriel  $\vec{X}(\vec{x})$ ,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{X} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{X} - \Delta \vec{X} .$$

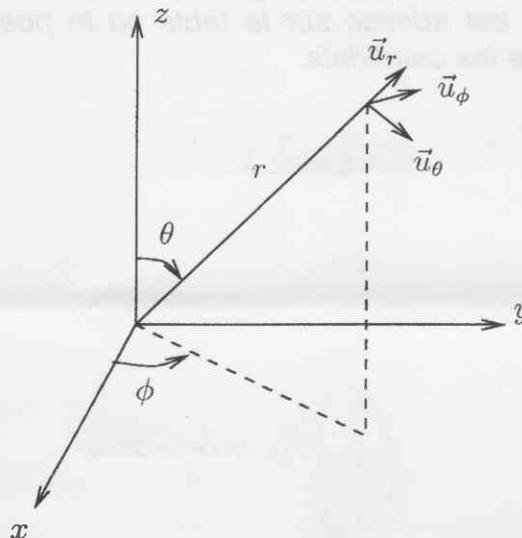
Laplacien d'un champ scalaire  $f(\vec{x})$  :

$$\Delta f = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} f .$$

Pour un champ scalaire  $f(\vec{x})$  et un champ vectoriel  $\vec{X}(\vec{x})$ ,

$$\overrightarrow{\text{rot}} (f \vec{X}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{X} + (\overrightarrow{\text{grad}} f) \wedge \vec{X} .$$

On notera  $(r, \theta, \phi)$  un système de coordonnées sphériques, avec  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$  les vecteurs unitaires de base.



Le gradient et le Laplacien d'une fonction  $f(r)$  à symétrie sphérique s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r) = f'(r) \vec{u}_r , \quad \Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r f(r)) .$$

On donne par ailleurs :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\sin \theta \vec{u}_\phi) = \frac{2}{r} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{1}{r} \sin \theta \vec{u}_\theta , \quad \overrightarrow{\text{rot}} (\cos \theta \vec{u}_r) = \overrightarrow{\text{rot}} (\sin \theta \vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} \sin \theta \vec{u}_\phi .$$

## 2 Mesure acoustique de $R$

A l'heure actuelle la détermination la plus précise de la constante des gaz parfaits est basée sur une expérience d'acoustique, par la mesure de la vitesse de propagation d'ondes sonores dans un gaz. Cette partie du problème est consacrée à l'étude du principe de cette expérience.

### 2.1 Vitesse des ondes sonores dans un gaz parfait

**Q19.** On considère un écoulement dans un fluide, caractérisé dans une description Eulérienne par les champs de vitesses  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , de masse volumique  $\rho(\vec{x}, t)$ , et de pression  $P(\vec{x}, t)$ . La taille caractéristique de l'écoulement étant de l'ordre du mètre, justifier que l'on puisse négliger l'effet de la gravité et supposer qu'au repos le fluide est homogène, de masse volumique  $\rho_0$  et de pression  $P_0$ .

**Q20.** On notera  $P_1$  et  $\rho_1$  les écarts des champs de pression et de masse volumique à leurs valeurs au repos, c'est-à-dire  $P(\vec{x}, t) = P_0 + P_1(\vec{x}, t)$  et  $\rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{x}, t)$ . Expliciter les hypothèses et approximations à faire pour écrire :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_1, \quad (1)$$

équation que l'on supposera vérifiée dans la suite.

**Q21.** Ecrire l'équation locale de conservation de la masse, en termes de  $\vec{v}$ ,  $\rho_0$  et  $\rho_1$ . Montrer qu'au même niveau d'approximation que celui utilisé pour obtenir (1), la conservation de la masse conduit à

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \text{div } \vec{v}. \quad (2)$$

**Q22.** Le fluide est décrit par une équation d'état liant sa température, son volume et sa pression, et on définit le coefficient de compressibilité isentropique,

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S.$$

On suppose que l'évolution des particules de fluide se fait de manière adiabatique et réversible. Transformer l'équation (2) en une expression reliant  $P_1$ ,  $\vec{v}$  et  $\chi_S$ .

**Q23.** Montrer alors que la surpression  $P_1$  vérifie l'équation d'onde

$$\Delta P_1 - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0; \quad (3)$$

vous explicitez la valeur de la célérité acoustique  $c_a$  en fonction de  $\rho_0$  et de  $\chi_S$ .

**Q24.** Montrer qu'au cours de l'évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait la quantité  $PV^\gamma$  est conservée. Dans cette formule  $\gamma = C_p/C_v$  est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants. En déduire la valeur de  $\chi_S$ , et l'expression suivante de la célérité des ondes acoustiques :

$$c_a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

On peut donc en principe déduire de la mesure de la vitesse des ondes sonores la valeur de  $R$ , et donc de  $k_B$  en supposant connu le nombre d'Avogadro.

**Q25.** L'expérience a été réalisée avec de l'argon. Justifier ce choix ; que vaut  $\gamma$  pour ce gaz ?

**Q26.** Donner la valeur numérique de  $c_a$  à  $0^\circ\text{C}$ , avec  $M/\gamma = 24 \text{ g.mol}^{-1}$  pour l'argon. On utilisera la valeur de  $R$  rappelée au début de l'énoncé.  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

## 2.2 Résonances acoustiques dans une cavité sphérique

Dans l'expérience la mesure de  $c_a$  a été réalisée par l'intermédiaire d'un phénomène de résonance dans une cavité acoustique sphérique.

**Q27.** On s'intéresse aux solutions de l'équation d'onde (3) où  $P_1(\vec{x}, t)$  ne dépend de  $\vec{x}$  que par sa norme  $r$ , la distance entre l'origine  $O$  du système de coordonnées et le point repéré par  $\vec{x}$ . On pose  $\psi(r, t) = rP_1(r, t)$ . Montrer que  $\psi$  est solution d'une équation d'onde unidimensionnelle pour  $r \geq 0$ . Quelle est la condition aux limites imposée à  $\psi$  en  $r = 0$  ?

**Q28.** On considère en outre une dépendance temporelle sinusoïdale de pulsation  $\omega$  pour la fonction  $\psi$ , que l'on représentera en notation complexe par  $\underline{\psi}(r)e^{-i\omega t}$ . Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{\psi}(r)$ , la résoudre et montrer que, à une constante multiplicative près,

$$P_1(r, t) = \frac{\sin(kr)}{r} e^{-i\omega t}, \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c_a}.$$

**Q29.** Expliciter le champ de vitesses  $\vec{v}$  qui en résulte.

**Q30.** On suppose que le fluide est placé dans une cavité sphérique, de centre  $O$  et de rayon  $a$ , parfaitement rigide. Quelle condition aux limites cela implique-t-il ?

**Q31.** En déduire que les pulsations des modes radiaux permis dans cette cavité sont de la forme

$$\omega_p = \frac{c_a}{a} z_p, \quad (4)$$

où  $0 < z_1 < z_2 < \dots$  sont les solutions d'une équation que l'on précisera.

**Q32.** Représenter graphiquement cette équation. Etablir le développement asymptotique de  $z_p$  pour les grandes valeurs de  $p$ , à l'ordre  $1/p$  inclus.

**Q33.** Donner la valeur numérique de la fréquence du mode  $p = 1$ , pour de l'argon à  $0^\circ\text{C}$  dans une cavité sphérique de volume 3 L.

La mesure expérimentale des fréquences de résonance de cette cavité permet ainsi de remonter à  $c_a$ , et donc à  $R$ . En principe il suffit donc d'exciter des ondes acoustiques dans la cavité, à une fréquence variable, et de repérer les fréquences où l'intensité des ondes stationnaires engendrées est maximale. Un certain nombre d'effets plus subtils doivent toutefois être considérés pour atteindre la grande précision requise sur la valeur de  $R$  ainsi obtenue. Une précision relative de l'ordre de  $10^{-6}$  avait en effet été atteinte lors de la réalisation de cette expérience. Dans la suite de cette partie on s'intéresse à deux de ces effets.

### 2.3 Le problème de la mesure du volume de la cavité

Pour déduire la célérité de l'équation (4) il faut connaître le rayon  $a$  de la cavité, qui est difficile à mesurer avec une très grande précision. On va voir maintenant comment s'affranchir de ce problème en utilisant la cavité comme un résonateur pour des ondes électromagnétiques à la place des ondes acoustiques.

**Q34.** La cavité sphérique de rayon  $a$ , que l'on suppose entourée d'un métal parfaitement conducteur, est vidée du gaz utilisé pour l'expérience acoustique. Par une simple analyse dimensionnelle, donner la forme des fréquences de résonance électromagnétiques, c'est-à-dire les fréquences pour lesquelles des ondes stationnaires peuvent exister au sein de cette cavité. Donner l'ordre de grandeur de la plus basse de ces fréquences pour le résonateur sphérique de volume 3 L utilisé dans l'expérience. A quel domaine ces radiations appartiennent-elles ? Comment utiliser ce résultat pour s'affranchir d'une mesure précise du rayon  $a$  ? Dans les questions suivantes on va calculer quantitativement les fréquences de certains de ces modes.

**Q35.** Rappeler les équations de Maxwell auxquelles obéissent les champs  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  dans le vide.

**Q36.** Montrer que ces champs vérifient l'équation d'onde, pour une célérité égale à la vitesse de la lumière notée  $c$ .

**Q37.** Quelles sont les conditions aux limites au voisinage de la paroi de la cavité, supposée parfaitement conductrice ?

**Q38.** Peut-on chercher, comme on l'a fait dans le cas acoustique, une solution de l'équation d'onde à symétrie sphérique sous la forme  $\vec{E}(\vec{x}, t) = E(r, t) \vec{u}_r$  ? On pourra faire appel au théorème de Gauss, et l'on rappelle que la cavité est supposée vide.

**Q39.** On considère une évolution temporelle à la pulsation  $\omega$ , et l'on pose

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \underline{\vec{E}}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \underline{\vec{B}}(\vec{x}) e^{-i\omega t}.$$

Ecrire les équations de Maxwell en termes des champs  $\underline{\vec{E}}(\vec{x})$  et  $\underline{\vec{B}}(\vec{x})$ . Déduire des équations d'onde pour  $\underline{\vec{E}}(\vec{x}, t)$  et  $\underline{\vec{B}}(\vec{x}, t)$  les équations différentielles vérifiées par  $\underline{\vec{E}}(\vec{x})$  et  $\underline{\vec{B}}(\vec{x})$ .

**Q40.** On cherche une solution de la forme

$$\underline{\vec{E}}(\vec{x}) = \underline{E}(r) \sin \theta \vec{u}_\phi; \quad (5)$$

on admettra que la divergence de ce champ vectoriel est nulle. Montrer que  $\underline{E}$  est solution de l'équation suivante :

$$\underline{E}''(r) + \frac{2}{r} \underline{E}'(r) + \left( k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \underline{E}(r) = 0;$$

on consultera le formulaire donné en début d'énoncé, et l'on précisera la valeur de  $k$ .

**Q41.** Quelle est la condition sur  $\underline{E}(r)$  imposée par la paroi conductrice de la cavité ? Exprimer  $\underline{\vec{B}}(\vec{x})$  à l'aide de l'expression (5) pour  $\underline{\vec{E}}$  et d'une des équations de Maxwell. Montrer que si la condition aux limites au voisinage de la paroi est vérifiée pour le champ électrique, alors elle l'est aussi pour le champ magnétique.

**Q42.** On pose  $\underline{E}(r) = f(kr)$ . Donner l'équation différentielle vérifiée par  $f(z)$ .

**Q43.** On peut montrer que la seule solution de cette équation (à une constante multiplicative près) qui ne diverge pas en  $z = 0$  est  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$ . En déduire que les pulsations des modes électromagnétiques de cette cavité sont

$$\omega_p = \frac{c}{a} z_p, \quad (6)$$

où les  $z_p$  sont les mêmes que ceux de l'équation (4) décrivant les résonances acoustiques.

**Q44.** Calculer la valeur numérique de la fréquence du mode  $p = 1$ .

**Q45.** A partir d'un raisonnement simple et sans refaire de calculs préciser comment l'équation (6) est modifiée si les mesures des résonances électromagnétiques sont effectuées en présence du gaz, que l'on assimilera à un milieu diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$ .

## 2.4 Prise en compte de l'élasticité de la cavité acoustique

On revient maintenant sur le calcul des pulsations des résonances acoustiques effectué dans la partie 2.2, pour corriger l'hypothèse faite alors d'une paroi parfaitement rigide. En effet le métal constituant l'enveloppe de la cavité a une certaine élasticité, les ondes acoustiques entraînent donc des déformations de la paroi qui modifient faiblement les pulsations de résonance au sein de la cavité.

**Q46.** Considérons d'abord pour simplifier une situation unidimensionnelle, schématisée sur la figure 1. Un piston de surface  $S$  et de masse surfacique  $\mu$  est astreint à se déplacer sans frottement le long d'un axe  $x$ . Il est soumis à une force de rappel élastique de constante de raideur  $\kappa$ . Le piston sépare un compartiment de pression  $P_0 + P_1(t)$  et une région de pression  $P_0$  constante. Ecrire l'équation du mouvement qui régit  $x(t)$ . On introduira et définira la pulsation caractéristique  $\omega_c$  du mouvement libre du piston.

**Q47.** Calculer l'admittance acoustique  $Y(\omega)$ , c'est-à-dire le rapport des amplitudes complexes à la pulsation  $\omega$  de la vitesse du piston et de la surpression  $P_1$ .

**Q48.** On revient à la géométrie sphérique de la partie 2.2, et l'on suppose maintenant que la paroi de la cavité de rayon  $a$  n'est plus parfaitement rigide mais se comporte comme une interface d'admittance  $Y(\omega)$ . En utilisant l'expression de  $Y$  établie à la question précédente et en négligeant l'amplitude du mouvement de la paroi devant la longueur d'onde acoustique, donner l'équation fixant les nouvelles valeurs  $\omega'_p$  des modes acoustiques radiaux permis dans la cavité.

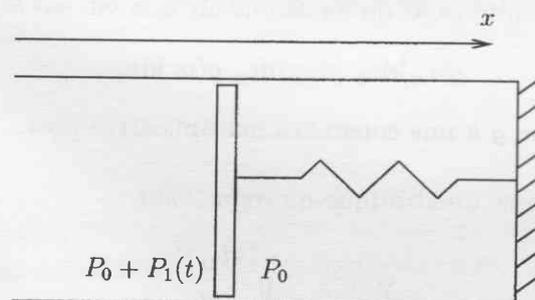


FIG. 1 – Schématisation de l'élasticité de la cavité acoustique.

**Q52.** Faire la liste des autres effets physiques qui, selon vous, devraient être considérés pour décrire plus précisément cette expérience.

Q19 Equation d'Euler :  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}P + \rho \vec{g}$

Au repos :  $\vec{0} = -\text{grad}P_0 + \rho_0 \vec{g}$

Les variations de pression  $P_0$  sont infimes par un gaz sur une hauteur de 1m : on peut considérer que  $P_0$  est uniforme à cette échelle.

Q20  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$   
 ordre 1      terme d'ordre 2

$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\rho_0 + \rho_1) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

lorsqu'on ne prend que les termes d'ordre 1 c'est l'approximation acoustique de linéarisation

$-\text{grad}P = -\text{grad}P_0 - \text{grad}P_1 \approx -\text{grad}P_1$   
 puisque la pesanteur a été négligée ce qui conduit à  $P_0$  uniforme

Q21 Conservation :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \text{div}((\rho_0 + \rho_1) \vec{v}) = 0$

$\rho_0$  est constant ; les termes d'ordre 1 mènent à :

$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v} = 0$  (OK)

Q22  $\chi_s = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial P_1}$

$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t}$  d'où avec (2)

(2')  $\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \text{div} \vec{v}$

Q23  $\frac{\partial(2')}{\partial t} : \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \text{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)$

(on peut intervertir opérateurs spatiaux et temporels)

avec (1)  $\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = +\frac{1}{\rho_0 \chi_s} \text{div}(\text{grad} P_1)$

d'où  $\Delta P_1 - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$  (3) (OK)

avec  $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

Q24 1<sup>er</sup> principe  $dU = \delta W + \delta Q = -p dV + T ds$   
 avec réversibilité

GP  $dU = n c_v dT$  isentropique :  $ds = 0$

d'où  $n c_v dT = -p dV$

GP  $pV = nRT$

$\Rightarrow n c_v dT = -\frac{nRT dV}{V}$

$c_v \frac{dT}{T} = -\frac{R dV}{V} \Rightarrow c_v \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} = 0$  (1)

$T^{\frac{c_v}{R}} V^R = \text{cte}$  comme  $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$  par le GP

$T^{\frac{1}{\gamma-1}} V = \text{cte}$

Remplaçons T proportionnel à  $V^{\frac{1}{\gamma-1}}$   
 $T^{\frac{1}{\gamma-1}} V^{\frac{1}{\gamma-1} + 1} = \text{cte}$  ou  $T^{\frac{1}{\gamma-1}} V^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{cte}$

passons à la puissance  $(\gamma-1)$  :  $T V = \text{cte}$  (OK)

Differentions :  $\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma \frac{\partial V}{V} = 0$

d'où  $\left[ \chi_s = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial P} = \frac{1}{\gamma P} \right]$  d'où  $c_a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}}$

mais GP :  $PV = nRT$  ou  $P = \frac{m}{M} \frac{RT}{V} = \frac{\rho RT}{M}$

d'où  $c_a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$  puisque  $\rho = \frac{m}{V}$  (OK)

Q25 L'argon, gaz rare, est monoatomique et ne réagit pas chimiquement.

Monoatomique  $\rightarrow \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}$

$\gamma = \frac{5}{3}$

Q26  $c_a = \sqrt{\frac{8,314 \times 273,15}{24 \cdot 10^{-3}}}$   $c_a = 318,6 \text{ m.s}^{-1}$

Q27  $\Delta P_1 - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$  avec  $\psi = r P_1$

donc  $\Delta P_1 = \Delta \left( \frac{\psi}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi}{dr^2}$  d'après formulaire

et  $\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

d'où  $\frac{d^2 \psi}{dr^2} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$

En  $r=0$   $\psi = r P_1 = 0$  car  $P_1$  ne peut être infinie :  $\psi(r=0, t) = 0$

Q28  $\psi = \psi(r) e^{-i\omega t}$  d'où

$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{c_a^2} \omega^2 \psi = 0$

Posons  $k = \frac{\omega}{c_a}$   $\psi = A e^{ikr} + B e^{-ikr}$

Condition limite :  $\psi(r=0) = 0 \rightarrow A = -B$

$\psi = 2A \sin kr$  donc  $P_1 = \frac{\sin(kr)}{r} e^{-i\omega t}$   
 (à un facteur près) (OK)

Q29. Ayant  $P_1$ , le champ de vitesses est donné par (1) :  $-\rho_0 i\omega \vec{v} = -\text{grad} P_1$   
 $\text{grad} P_1 = e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sin kr}{r} \right) \vec{e}_r$

$= e^{-i\omega t} \left( \frac{k \cos kr}{r} - \frac{1 \sin kr}{r^2} \right) \vec{e}_r$

donc  $\vec{v} = \frac{1}{i\omega \rho_0} \left( \frac{k \cos kr}{r} - \frac{1 \sin kr}{r^2} \right) e^{-i\omega t} \vec{e}_r$   
 (à un facteur près)

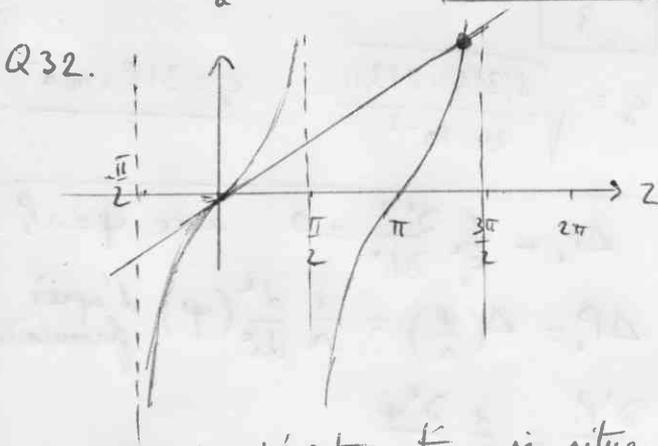
Q30. Cauté rigide en  $r=a$  donc  $v(a)=0$

Q31. D'où  $k \cos ka - \frac{1}{a} \sin ka = 0$

càd  $\tan ka = ka$  ou  $\tan \frac{\omega a}{c_a} = \frac{\omega a}{c_a}$

Si  $z_p$  sont les solutions de  $\tan z = z$

alors  $\frac{\omega_p a}{c_a} = z_p$  soit  $\omega_p = \frac{c_a z_p}{a}$  (OK)



Les points d'intersection se situent vers les asymptotes, d'autant mieux qu'on va vers les grandes valeurs de  $z$ .

$z_p \approx (2p+1) \frac{\pi}{2}$  avec  $p$  entier  $\geq 1$

Q33.  $p=1 \rightarrow z_p = \frac{3\pi}{2}$  (ce qui n'est pas vraiment le point d'intersection dessiné sur le graphe ci-dessus) ← Q26

d'où  $\omega_p = \frac{c_a}{a} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{318,6}{\left(\frac{9 \cdot 10^{-3}}{4\pi}\right)^{1/3}} \cdot \frac{3\pi}{2}$

avec  $\frac{4}{3} \pi a^3 = 3 \cdot 10^{-3}$

$\frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{318,6}{\left(\frac{9}{4\pi}\right)^{1/3} 10^{-1}} \cdot \frac{3}{4} = 2544 \text{ Hz}$

Q34. On dispose d'une distance  $a$  et on demande une fréquence c-à-d l'inverse d'un temps. Ce qui relie une distance et un temps, c'est la vitesse. Soit  $c$  la vitesse de propagation de la lumière :  $ct \sim a$  donc  $f \sim \frac{c}{a}$

Les fréquences de résonance seront des multiples de  $\frac{c}{a}$

odg :  $f \sim \frac{3 \cdot 10^8}{\left(\frac{9}{4\pi}\right)^{1/3} \cdot 10^{-1}} = 3,35 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 3,35 \text{ GHz}$

le GigaHertz appartient au domaine des micro-ondes.

On vient de voir :

- dans le domaine acoustique :  $f_a = \frac{c_a}{a} z_p$

- dans le domaine e.m :  $f = \frac{c}{a}$

La mesure du rapport des 2 fréquences :  $\frac{f_a}{f} = \frac{c_a z_p}{c}$  permet de s'affranchir du rayon  $a$

Q35  $\text{div} \vec{E} = 0$   $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  dans  $\emptyset$   
 $\text{div} \vec{B} = 0$   $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  vide

Q36  $\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$   
 $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} = \vec{0} - \Delta \vec{E}$

$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$  Equation d'onde à la vitesse  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

De même pour  $\vec{B}$  en partant de  $\text{rot} \text{rot} \vec{B}$

Q37 Dans un métal parfait les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nuls.

Il y a continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  donc  $E_{\text{tang}}(a) = 0$ .

Il y a continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  donc  $B_n(a) = 0$

Q38 Par le théorème de Gauss sur une surface de Gauss de rayon  $r < a$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$  soit  $E(r,t) 4\pi r^2 = 0$

car la caute est vide de charge donc  $E(r,t)$  serait nul

On cherche donc un autre champ E

$$Q39 \quad \text{div}(\vec{E}(r)e^{-i\omega t}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{div} \vec{E}(r) = 0 \\ \text{rot}(\vec{E}(r)e^{-i\omega t}) = -\frac{\partial(\vec{B}(r)e^{-i\omega t})}{\partial t} \rightarrow \text{rot} \vec{E}(r) = +i\omega \vec{B}(r) \\ \text{rot}(\vec{B}(r)e^{-i\omega t}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\vec{E}(r)e^{-i\omega t})}{\partial t} \rightarrow \text{rot} \vec{B}(r) = \frac{-i\omega}{c^2} \vec{E}(r) \\ \text{div}(\vec{B}(r)e^{-i\omega t}) = 0 \rightarrow \text{div} \vec{B}(r) = 0 \end{cases}$$

Q40. Partons de  $\text{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B} \rightarrow$   
 $\text{rot}(\vec{E}(r)\sin\theta \vec{u}_\phi) = i\omega \vec{B}$   
 Appliquons le formulaire sur  $\text{rot}(f\vec{X})$  avec  
 ici  $f = E(r)$  et  $\vec{X} = \sin\theta \vec{u}_\phi$  et utilisons  
 $\text{rot}(\sin\theta \vec{u}_\phi)$  donné par le formulaire  $\rightarrow$

$$E \text{rot}(\sin\theta \vec{u}_\phi) + \text{grad} E \wedge \sin\theta \vec{u}_\phi = i\omega \vec{B}$$

$$E \left( \frac{2}{r} \cos\theta \vec{u}_r - \frac{1}{r} \sin\theta \vec{u}_\theta \right) + E' \vec{u}_r \wedge \sin\theta \vec{u}_\phi = i\omega \vec{B}$$

$$\frac{2E}{r} \cos\theta \vec{u}_r - \frac{E}{r} \sin\theta \vec{u}_\theta - E' \sin\theta \vec{u}_\theta = i\omega \vec{B}$$

Réappliquons le  $\text{rot}$  et remplaçons  $\text{rot} \vec{B} = \frac{-i\omega E}{c^2}$

$$\frac{2E}{r} \text{rot}(\cos\theta \vec{u}_r) + 2 \text{grad} \left( \frac{E}{r} \right) \wedge \cos\theta \vec{u}_r - \frac{E}{r} \text{rot}(\sin\theta \vec{u}_\theta) - \text{grad} \left( \frac{E}{r} \right) \wedge \sin\theta \vec{u}_\theta - E' \text{rot}(\sin\theta \vec{u}_\theta) - \text{grad} E' \wedge \sin\theta \vec{u}_\theta = i\omega \left( -\frac{i\omega E}{c^2} \right)$$

Appliquons le formulaire sur  $\text{rot}(\cos\theta \vec{u}_r)$  et remarquons que  $\text{grad} \left( \frac{E}{r} \right) \parallel \vec{u}_r$  donc  
 $2 \text{grad} \left( \frac{E}{r} \right) \wedge \cos\theta \vec{u}_r = \vec{0} \rightarrow$

$$\frac{2E}{r^2} \sin\theta \vec{u}_\phi - \frac{E}{r^2} \sin\theta \vec{u}_\phi - \frac{d(E/r)}{dr} \vec{u}_r \wedge \sin\theta \vec{u}_\theta - \frac{E'}{r} \sin\theta \vec{u}_\phi - \frac{dE'}{dr} \vec{u}_r \wedge \sin\theta \vec{u}_\theta = \frac{\omega^2}{c^2} E(r) \sin\theta \vec{u}_\phi$$

Projetons sur  $\vec{u}_\phi$  :  $\frac{E}{r^2} - \frac{E'}{r} + \frac{E}{r^2} - \frac{E'}{r} - E'' = \frac{\omega^2}{c^2} E$   
 ( $\sin\theta$  s'élimine)

$$\text{d'où } \boxed{E'' + \frac{2}{r} E' + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2}{r^2} \right) E = 0} \quad (\text{OK})$$

$$\hookrightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Q41.  $E_{\text{tang}} = 0$  en  $r = a$   
 $\vec{u}_\phi$  est tangentiel à la paroi donc  
 $\boxed{E(r=a) = 0}$

Dans la Q40 on a obtenu  
 $E \left( \frac{2}{r} \cos\theta \vec{u}_r - \frac{1}{r} \sin\theta \vec{u}_\theta \right) + E' \vec{u}_r \wedge \sin\theta \vec{u}_\phi = i\omega \vec{B}$   
 d'où  $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \left[ E \left( \frac{2}{r} \cos\theta \vec{u}_r - \frac{1}{r} \sin\theta \vec{u}_\theta \right) + E' \sin\theta \vec{u}_\phi \right]}$

Comme  $E(r=a) = 0$  et  $\text{rot} \vec{B} = \frac{-i\omega E}{c^2}$  (3)

$\vec{B}(a) = \frac{1}{i\omega} (-E'(r=a) \sin\theta) \vec{u}_\theta$   
 On vérifie bien que la composante normale de  $\vec{B}$  (càd  $B_r$ ) est nulle en  $r=a$ .

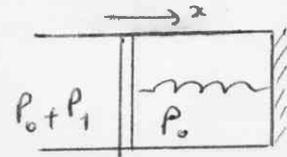
Q42. Avec  $E(r) = f(kr)$  on a :  
 $k^2 f''(kr) + \frac{2}{r} k f'(kr) + \left( k^2 - \frac{2}{r^2} \right) f(kr) = 0$   
 $f''(kr) + \frac{2}{kr} f'(kr) + \left( 1 - \frac{2}{k^2 r^2} \right) f(kr) = 0$   
 ou  $\boxed{f''(z) + \frac{2}{z} f'(z) + \left( 1 - \frac{2}{z^2} \right) f(z) = 0}$

Q43. On souhaite un champ nul en  $r=a$   
 càd  $f(ka) = 0$  soit  $\frac{\sin ka}{(ka)^4} - \frac{\cos ka}{ka} = 0$   
 càd  $\boxed{\tan ka = ka}$

On retrouve les mêmes modes qu'en acoustique (cf Q31 et 32)

Q44  $\omega_1 = \frac{c}{a} \times \frac{3\pi}{2}$  (car  $z_1 = \frac{3\pi}{2}$  : cf Q32)  
 $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{a} \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 10^8}{4} \frac{3}{4} = 2,25 \text{ GHz}$

Q45. Il suffit de remplacer  $c$  par  $\frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$   
 alors  $\boxed{f_{\text{modifiée}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{3}{4a} = \frac{f_1}{\sqrt{\epsilon_r}}}$

Q46  Théorème du centre d'inertie au piston :  $\mu S \ddot{x} = (P_0 + P_1)S - P_0 S - kx$   
 $\boxed{\ddot{x} + \omega_c^2 x = \frac{P_1}{\mu}}$  avec  $\omega_c^2 = \frac{k}{\mu}$

Q47  $Y = \frac{v}{P_1}$  or  $\ddot{x} = -i\omega v$  ( $x$  en  $e^{-i\omega t}$ )  
 $\underline{x} = \frac{v}{-i\omega}$

donc  $\left( -i\omega - \frac{\omega_c^2}{i\omega} \right) v = \frac{P_1}{\mu}$   
 $\boxed{Y = -\frac{1}{\mu} \frac{1}{i\omega + \frac{\omega_c^2}{i\omega}} = \frac{i\omega}{\mu(\omega^2 - \omega_c^2)}}$

Q48 Revoir Q28 et Q29 avec cette fois la condition  $v(a) = Y P_1(a)$

En reprenant les résultats de Q 28 et Q 29

$$\frac{1}{i\omega \rho_0} \left( k \cos ka - \frac{1}{a^2} \sin ka \right) = Y \cdot \frac{\sin ka}{a}$$

Remplaçons  $Y$  et simplifions par  $a$  :

$$\frac{1}{\rho_0} \left( k \cos ka - \frac{\sin ka}{a} \right) = - \frac{\omega^2}{\mu(\omega^2 - \omega_c^2)} \sin ka$$

Avec  $h = \frac{\omega}{c_a}$  (cf Q 28) cela fait :

$$\cos ka - \frac{\sin ka}{ka} = \frac{\rho_0 c_a}{\mu} \frac{\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} \sin ka$$