

*De l'atome d'hydrogène aux galaxies*

L'atome d'hydrogène, dans son état fondamental, absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm. Cette transition, appelée raie HI à 21 cm, est celle du maser à hydrogène. Elle est aussi à l'origine du rayonnement émis à cette longueur d'onde par le milieu interstellaire constitutif des galaxies. Après avoir étudié l'origine physique de cette transition, nous verrons l'intérêt d'observer des galaxies dans cette fenêtre de rayonnement.

Ce sujet comprend une annexe située en fin de texte et regroupant des extraits de documents, un formulaire et des données numériques.

I La raie HI à 21 cm

Un atome d'hydrogène protoné (isotope ^1H dont le noyau est un proton) dans son état fondamental peut absorber un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 21$ cm, c'est ce que l'on appelle usuellement la raie HI à 21 cm. Pour interpréter exactement l'origine de cette raie, il faut mener une étude complète de l'atome d'hydrogène dans le cadre de la théorie de Dirac (mécanique quantique relativiste).

Nous pouvons cependant comprendre qualitativement l'origine de la raie HI à partir des quelques notions simples évoquées dans ce qui suit.

I.A – Étude classique de l'atome d'hydrogène

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\vec{L}$.

- Q 1. Rappeler l'expression de la force électrostatique $\vec{F}$ s'exerçant sur l'électron.
- Q 2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_P de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \rightarrow \infty$.
- Q 3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.
- Q 4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + E_{P\text{eff}}(r)$$

où $E_{P\text{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital $\vec{L}$ de l'électron.

- Q 5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{P\text{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E et du moment cinétique $\vec{L}$.
- Q 6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon r de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique E de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L , e , m_e et ϵ_0 .
- Q 7. Dessiner une trajectoire de l'électron si $L = 0$.

I.B – Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et $\hbar$ la constante de Planck.

- Q 8. Montrer que les orbites sont quantifiées. Déterminer la valeur du rayon a_0 de la première orbite de Bohr.
- Q 9. En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.
- Q 10. À quelle température l'énergie d'agitation thermique d'un atome d'hydrogène est-elle comparable à son énergie d'ionisation ? Commenter.

Q 11. L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est susceptible d'absorber ou d'émettre un rayonnement de longueur d'onde proche de $\lambda = 21$ cm. Le modèle de Bohr permet-il de comprendre l'origine de cette transition ?

I.C – La structure hyperfine de l'atome d'hydrogène

Pour comprendre l'origine de la raie HI il faut étudier les interactions magnétiques entre le proton et l'électron. Afin d'en obtenir un ordre de grandeur, nous allons étudier ici l'interaction entre le dipôle magnétique associé au spin de l'électron et le dipôle magnétique associé au spin du proton, qui est appelée « interaction spin-spin ».

Q 12. Dans le cadre du modèle planétaire classique de l'atome d'hydrogène, montrer que le moment magnétique $\vec{M}_o$ de l'électron sur une orbite circulaire est proportionnel à son moment cinétique orbital $\vec{L}$: $\vec{M}_o = \gamma_o \vec{L}$.

Q 13. Exprimer γ_o en fonction de e et de m_e , la masse de l'électron. Comment se nomme cette constante ?

Le résultat précédent est encore vrai en théorie quantique : le moment magnétique d'une particule est proportionnel à son moment cinétique. En outre, dans une théorie quantique relativiste chaque particule élémentaire possède un spin qui est interprété comme son moment cinétique intrinsèque. En généralisant le résultat précédent, elle possède aussi un moment magnétique intrinsèque (ou moment magnétique de spin) qui est proportionnel à son spin. Ainsi :

— l'électron, de spin $\vec{S}_e$, possède un moment magnétique $\vec{M}_e$ proportionnel à son spin : $\vec{M}_e = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S}_e$, où $g_s \approx 2,00$;

— le proton de masse m_p et de spin $\vec{S}_p$, possède un moment magnétique de spin $\vec{M}_p = g_p \frac{e}{2m_p} \vec{S}_p$ où $g_p = 5,58$;
les coefficients g_s et g_p sont appelés « facteurs de Landé » de l'électron et du proton ;

— l'expression du champ magnétique créé en un point P (différent de O) par un moment magnétique ponctuel $\vec{M}$ placé en O est

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{M}}{r^3}$$

où $r = \|\vec{OP}\|$ et $\vec{u} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$;

— on rappelle que l'énergie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{M}$ placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ se met sous la forme $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$;

— une propriété remarquable du spin de l'électron (ou du proton) est que sa projection suivant une direction quelconque ne peut prendre que deux valeurs $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$.

Q 14. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le proton, sur l'électron, en supposant que l'électron est sur l'orbite fondamentale du modèle de Bohr et en admettant que le moment magnétique de spin du proton $\vec{M}_p$ est orthogonal au plan de l'orbite.

Q 15. À partir des éléments précédents, montrer que l'état fondamental de l'hydrogène est formé de deux « sous-niveaux » d'énergie E_l et $E_u = E_l + \Delta E$ (avec $E_l < E_u$). On parle de « structure hyperfine » de l'état fondamental.

Q 16. Donner l'expression, en fonction de g_s , g_p , e , m_e , m_p et a_0 , de la différence d'énergie ΔE entre les deux sous-niveaux hyperfins à laquelle conduit ce modèle.

En fait, cette modélisation ne permet pas de déterminer correctement la structure hyperfine du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, pour deux raisons :

— elle ne prend pas en compte toutes les interactions magnétiques entre le proton et l'électron ;

— le modèle de Bohr utilisé dans les questions précédentes est très insuffisant pour décrire de façon réaliste l'atome d'hydrogène et en particulier son état électronique fondamental 1s.

Q 17. La théorie quantique nous apprend que dans cet état 1s ($n = 1$, $\ell = 0$), le moment cinétique orbital de l'électron est nul (soit $L_o = 0$). Montrer que ceci est contradictoire avec le fait d'assimiler cet état à celui d'un électron décrivant l'orbite fondamentale de l'orbite de Bohr.

Dès lors, il est légitime de penser que la théorie quantique ne donne pas toujours les mêmes résultats que la théorie « semi-classique » de l'atome de Bohr. Par exemple, la théorie quantique permet de montrer que l'interaction spin-spin dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène est nulle (ceci est dû à ce que la fonction d'onde de l'électron 1s est à symétrie sphérique, ce qui est une autre façon d'exprimer le fait que le moment cinétique orbital de l'électron est nul).

Il existe d'autres interactions magnétiques entre le proton et l'électron dans l'atome d'hydrogène. En particulier, on a négligé jusque là l'interaction spin-spin contact (ou interaction de contact de Fermi), qui comme l'interaction spin-spin conduit à une énergie d'interaction proportionnelle à $\vec{M}_e \cdot \vec{M}_p$, mais qui n'existe que si l'électron a une probabilité de présence non nulle dans le proton, c'est-à-dire au point O (c'est pourquoi on qualifie cette

interaction de spin-spin « contact » puisqu'elle n'existe que si l'électron (ponctuel) est en « contact » avec le proton, ponctuel lui aussi).

Les fonctions d'onde $\varphi_{nlm}(\vec{r})$ de l'électron de l'atome d'hydrogène prennent des valeurs non nulles en $\vec{r} = \vec{0}$ pour les états ns (tels que $\ell = 0$), tandis que pour les états np, nd, etc. (tels que $\ell \neq 0$) elles s'annulent en $\vec{r} = \vec{0}$. Ainsi, l'électron dans un état s ($\ell = 0$, donc $L_o = 0$) a une probabilité de présence en O non nulle, soit $\|\varphi_{ns}(\vec{r} = \vec{0})\|^2 \neq 0$, tandis qu'un électron dans un état p, d, f, ... ($\ell = 1, 2, \dots$, donc $L_o \neq 0$) a une probabilité de présence nulle en O.

Q 18. Donner une interprétation physique de ce résultat dans le cadre d'une théorie classique de l'atome d'hydrogène (sous-partie I.A).

Dans la mesure où l'énergie d'interaction spin-spin contact est proportionnelle à $\vec{M}_e \cdot \vec{M}_p$, la prise en compte de cet effet conduit à l'existence de deux sous-niveaux hyperfins l et u dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. Un calcul quantique de la différence d'énergie ΔE entre ces deux sous-niveaux conduit à

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8}{3} g_s g_p \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{e\hbar}{2m_e} \right)^2 \frac{1}{a_0^3}$$

Q 19. Calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u . Commenter ce résultat. Dans quel domaine spectral se situe cette raie ?

II Étude de l'interaction et de l'absorption entre les deux niveaux hyperfins

L'interaction hyperfine est due au fait que le proton, bien qu'il soit considéré comme un point, possède une structure interne. On peut le modéliser comme une sphère de rayon r_p contenant une charge électrique q_p et un moment magnétique $\vec{M}_p$. L'interaction hyperfine est alors due à l'interaction entre le moment magnétique de l'électron $\vec{M}_e$ et le moment magnétique du proton $\vec{M}_p$. Cette interaction est proportionnelle à $\vec{M}_e \cdot \vec{M}_p$.

On peut alors calculer la différence d'énergie entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

La différence d'énergie entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u est donnée par la formule suivante :

$$\Delta E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8}{3} g_s g_p \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{e\hbar}{2m_e} \right)^2 \frac{1}{a_0^3}$$

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

On peut alors calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde dans le vide λ_0 du rayonnement électromagnétique absorbé ou émis lors d'une transition entre les deux sous-niveaux hyperfins l et u en utilisant la formule suivante :

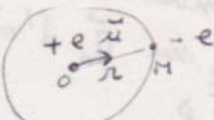
Gradient en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Données numériques

Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836 m_e$
Facteur de Landé de l'électron	$g_S = 2,00$
Facteur de Landé du proton	$g_p = 5,58$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$
Masse du Soleil	$M_\odot = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

• • • FIN • • •

1)  $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$

2) Par définition $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r}$

$dE_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$

$\rightarrow E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec $E_p \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$

3) Moment cinétique $\vec{L}$

Théorème du moment cinétique de l'électron par rapport au centre origine O où est le proton.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$

(on néglige la force gravitationnelle)

$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ car $\vec{F} \parallel \vec{O}\vec{M}$

donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ d'où $\vec{L} = \vec{Cte}$

Or $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m \vec{O}\vec{M} \wedge \vec{v}$

Ainsi $\vec{O}\vec{M} \wedge \vec{v}$ est une constante vecteur

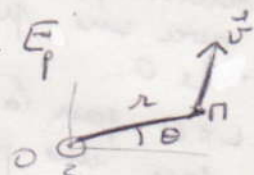
Donc la perpendiculaire à $\vec{O}\vec{M}$ est un vecteur constant

$\vec{Cte} = \vec{L}$

Donc R appartient au plan contenant O et perpendiculaire à $\vec{L}$

4) $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p$

avec $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$



d'où $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p$

E_p

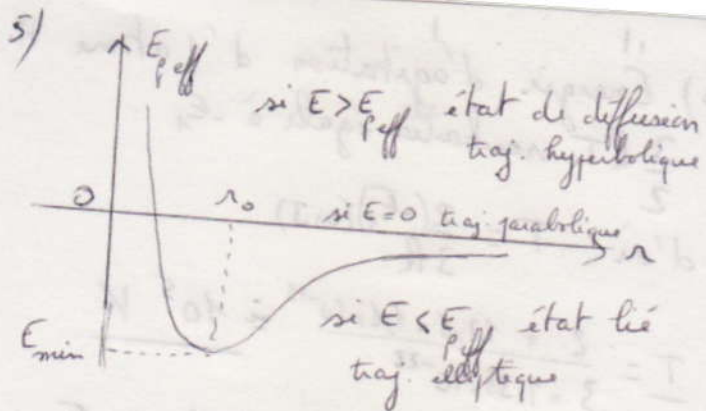
Or $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r \dot{\theta} (\vec{r} \wedge \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)$

$\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

soit $L = m r^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{m r^2}$

remplace : $E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p$

$E_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_p$ où $E = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$



En effet on doit avoir $r^2 > 0$ d'où $E > E_{eff}$ ce qui donne les intervalles accessibles de r illimité si $E \geq E_{eff}$, limité si $E < E_{eff}$

Concernant la valeur de L , si $L = 0$ il n'y a pas de rotation autour de O le mouvement sera rectiligne, direct vers O.

6) orbite circulaire pour $r = r_0$ donc à $E_{eff} = E_{min}$ (cf courbe)

Cela correspond à $\frac{dE_{eff}}{dr} = 0$

$\rightarrow -\frac{L^2}{m_e r_0^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{m_e e^2}$

Ainsi $E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m_e r_0^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m_e r_0^2} - \frac{L^2}{m_e r_0^2}$

$E = -\frac{L^2}{2 m_e r_0^2} = -\frac{m_e e^4}{2 (4\pi\epsilon_0)^2 L^2}$

7) $L = 0$ traj rectiligne vers O

8) Énoncé : $L = n \hbar$ sur orbite circulaire

d'où 6) : $r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}$ rayon quantifié

a_0 correspond à $n=1$: $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$

9) $E = -\frac{m_e^4}{2 (4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$ quantifiée

Fondamental $n=1$: $E_1 = -\frac{m_e^4}{2 (4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$

AN : $a_0 = \frac{4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} \times 1,054^2 \times 10^{-34} \times 2}{9,11 \times 10^{-31} \times 1,6^2 \times 10^{-19} \times 2}$

$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}$ (0,5 Å)

$E_1 = -\frac{9,11 \times 10^{-31} \times 1,6^3 \times 10^{-19} \times 2}{2 \times (4\pi \times 8,85 \times 10^{-12})^2 \times 1,054^2 \times 10^{-34} \times 2}$ (en eV)

$E_1 = -13,6 \text{ eV}$

10) Énergie d'agitation d'un atome H:
 $\frac{3}{2} kT$ sachant que égale à $-E_1$.
 d'où $T = \frac{2(-E_1)(\text{en J})}{3k}$

$$T = \frac{2 \times 13,6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{3 \times 1,38 \times 10^{-23}} \approx 10^5 \text{ K}$$

11) Calculons λ correspondant à E_1 :

$$\lambda = \frac{hc}{E_1} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8}{13,6 \times 1,6 \times 10^{-19}} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m}$$

très faible.

on peut penser à une autre transition entre fondamental et 1er état excité.

$$\lambda_{\text{autre}} = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{hc}{|E_1| \left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = \frac{4}{3} \lambda$$

Cela ne permet pas d'atteindre 20 cm

12)  $\vec{L} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} = m_e r v \vec{e}_z$
 $\vec{\Pi}_0 = i \vec{S}$ avec $i = \frac{e}{2\mu}$
 $S = \pi r^2$ et $\omega = \frac{v}{r}$

$$\text{d'où } \vec{\Pi}_0 = \frac{e v \pi r^2}{2\pi r} (-\vec{e}_z) = -\frac{e v r}{2} \vec{e}_z$$

car i va dans le sens opposé à l'électron (négatif) et $\vec{S}$ respecte la règle du tire-bouchon par le sens de i

13) donc $\vec{\Pi}_0 = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} = \gamma_0 \vec{L}$ avec $\gamma_0 = -\frac{e}{2m_e}$

γ_0 se nomme rapport gyromagnétique de l'électron

14) Énoncé $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\Pi}_p \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{\Pi}_p}{r^3}$

Énoncé : $\vec{\Pi}_p \perp \vec{u}$ d'où $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\Pi}_p}{r^3}$

Énoncé en remplaçant $\vec{\Pi}_p$: $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{g_p e}{3} \frac{\vec{S}}{r^3}$
 avec $r = a_0$ (du 8)

15) Énoncé : $V = -\frac{e}{r} \cdot \vec{p}$ ← crée par le proton de l'e-

$U = \frac{\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{S}}{4\pi a_0^3 2m_p}$ avec 2 valeurs possibles lors de la projection de $\vec{S}$ sur $\vec{\Pi}_0$ d'où 2 sous-niveaux:

$$E_u = \frac{\mu_0 g_p e}{4\pi a_0^3 2m_p} \cdot \frac{\hbar}{2}$$

$$E_l = - \text{idem}$$

$$\text{d'où } \Delta E = E_u - E_l = \frac{\mu_0 g_p e \hbar}{4\pi a_0^3 2m_p}$$

16) Remplaçons μ_0

$$E_u = \frac{g_p e}{2m_e} \frac{\hbar}{2} \frac{\mu_0 g_p e}{4\pi a_0^3 2m_p} \frac{\hbar}{2} = \frac{\mu_0 g_p^2 e^2 \hbar^2}{64 m_e m_p \pi a_0^3}$$

$$E_l = -E_u$$

$$\text{d'où } \Delta E = \frac{\mu_0 g_p^2 e^2 \hbar^2}{32 m_e m_p \pi a_0^3}$$

17) Dans l'orbite circulaire de Bohr $L \neq 0$ donc impossible d'assimiler cette trajectoire à l'état 1s.

18) Dans la théorie semi-classique qu'on vient d'étudier, on a remarqué que $L=0$ ne peut être une trajectoire circulaire. $L=0$ correspondrait à une droite passant par 0 ce qui coïncide avec une proba. de présence au voisinage de 0.

$L \neq 0$ pour la trajectoire circulaire coïncide avec une proba. de présence nulle en 0.

19) $\Delta E = h\nu_0$

$$\nu_0 = \frac{\mu_0}{4\pi \times 3} g_p g_p \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{e\hbar}{2m_e} \right)^2 \frac{1}{a_0^3} \times \frac{1}{h}$$

$$\nu_0 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8 \times 2 \times 5 \times 10^{-38}}{4\pi \times 3} \frac{(1,6 \times 10^{-19} \times 1,054 \times 10^{-34})^2}{1836 \times (2 \times 9,11 \times 10^{-31})^3} \frac{1}{(5,29 \times 10^{-11})^3}$$

Grosso-modo $\nu_0 \sim 10^{10} \text{ Hz}$
 Calcul : $\nu_0 = 1,4 \times 10^3 \text{ Hz}$
 fastidieux

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \times 10^8}{1,4 \times 10^3} = \frac{3}{14} \approx 0,21 \text{ m} \quad 21 \text{ cm}!!$$

qui correspond (bien-sûr !) au titre "la raie à 21 cm"
 Demain radio