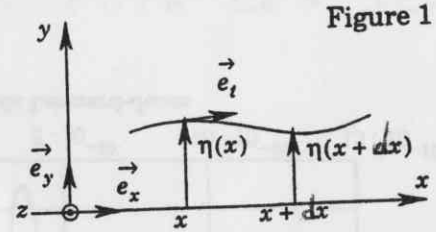
Déformation d'une poutre

Dans un microscope à force atomique, on mesure le déplacement de l'extrémité d'une poutre soumise à une force. L'objet de ce paragraphe est de relier la déformation d'une poutre aux efforts que subit celle-ci. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

A - Poutre dans un champ de pesanteur

On considère une poutre de faible section, de longueur L, de masse linéique uniforme λ, soumise à un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, où $\vec{e}_y$ désigne le vecteur unitaire de la verticale ascendante. On admettra que la poutre reste localisée dans un plan vertical (fig. 1 et 3). L'équation de la poutre à l'équilibre est $y = \eta(x)$. La section de la poutre étant faible, un point M de la poutre est repéré par son abscisse curviligne s, celle-ci étant comprise entre 0 et la longueur L de la poutre. Les efforts exercés par le tronçon $[s, L]$ sur le tronçon $[0, s]$ sont décrits par une force $\vec{T}(s)$ appliquée au point M et par un couple $\vec{\Gamma}(s)$. On désignera par $\vec{e}_t$ le vecteur unitaire tangent en M à la poutre. La direction de $\vec{T}(s)$ sera supposée dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, mais pas nécessairement colinéaire à $\vec{e}_t$.

Figure 1



A.1)

a) Préciser l'expression de la densité linéique de forces $\vec{f}(s)$ décrivant les efforts de pesanteur, le champ de pesanteur $-g\vec{e}_y$ et la masse linéique λ étant uniformes.

b) On prend pour système mécanique le tronçon MM' compris entre les abscisses s et $s+ds$; on appelle G le centre d'inertie de ce tronçon. Représenter sur un schéma les forces s'exerçant sur le système en M, M' et G ; en déduire la résultante des efforts subis par le système.

c) Donner les contributions au moment en G respectivement de $\vec{T}(s+ds)$, $\vec{\Gamma}(s+ds)$ exercés en $M'(s+ds)$ et du poids du système. Donner de même les contributions au moment en G des efforts exercés par le tronçon $[0, s]$ sur le système en $M(s)$. En déduire le moment résultant en G.

d) Écrire les deux équations vectorielles traduisant l'équilibre du tronçon $[s, s+ds]$.

A.2)

a) Montrer que $T_x(s) = \overrightarrow{T(s)} \cdot \vec{e}_x$ est une constante ; on notera T_0 cette constante.

b) Donner l'équation différentielle reliant $T_y(s) = \overrightarrow{T(s)} \cdot \vec{e}_y$ à λ et g (équation : (1)) (1)

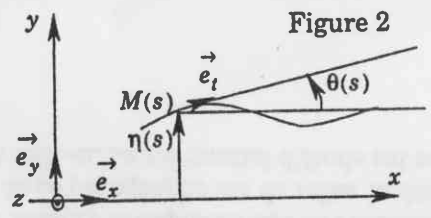
c) Montrer que $\vec{\Gamma}$ et $\vec{T}$ sont liés par

$$\frac{d\vec{\Gamma}(s)}{ds} + \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) = \vec{0}. \qquad (2)$$

.B - Application à de petites déformations élastiques d'une poutre

On utilise le modèle précédent pour décrire une poutre élastique ; on introduit pour cela l'angle $\theta = (\vec{e_x}, \vec{e_t})$ où le vecteur $\vec{e_t}$ est toujours le vecteur tangent à la poutre au point courant. La déformation du tronçon $[s, s+\Delta s[$ est mesurée par $\Delta\theta = \theta(s+\Delta s) - \theta(s)$. Dans le domaine d'élasticité, le moment des efforts est proportionnel à la déformation. D'autre part, un même moment produit une déformation d'autant plus grande que le tronçon est plus long ; la constante de proportionnalité est ainsi elle-même inversement proportionnelle à Δs. On peut donc poser :

Figure 2



$$\vec{\Gamma} = \frac{C}{\Delta s} d\theta \cdot \vec{e_z} \qquad (3)$$

où le vecteur $\vec{e_z}$ est le vecteur unitaire normal au plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ dans lequel on suppose localisé le système.

Dans l'approximation des petites déformations, θ reste faible. Cette approximation sera utilisée dans toute la suite.

.B.1)

a) Quelles sont alors les relations entre dx et ds, puis entre θ et $\eta'(x)$?

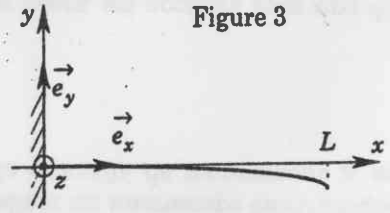
b) Donner l'expression approchée de $\vec{\Gamma}$ à partir de l'équation (3) en fonction de $\eta''(x)$.

c) Montrer que l'équation (2) permet d'exprimer T_y en fonction de C, T_0 et de dérivées de $\eta(x)$.

.B.2) Fléchissement d'une poutre pesante encastrée à une extrémité.

On choisit l'origine des ordonnées de telle sorte que $\eta(0) = 0$. L'encastrement est tel que la tangente à la poutre en $x = 0$ est horizontale.

Figure 3



a) Compte tenu des conditions aux limites en $x = L$, donner les valeurs de T_0, $T_y\,(x = L)$, $\Gamma\,(x = L)$.

b) Établir, à partir de l'équation différentielle (1) et des résultats précédents, l'expression de $T_y(x)$.

c) Déterminer $\eta'(0)$, $\eta''(L)$ et $\eta'''(L)$.

d) Déterminer la loi d'élongation $\eta(x)$ donnant la forme de la poutre à l'équilibre.

e) Préciser le déplacement $\eta(L)$ de l'extrémité libre.

f) *Application numérique :* Calculer numériquement le déplacement de l'extrémité libre pour $L = 100\ \mu m$, $g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$, $C = 2,12 \cdot 10^{-12}\ N \cdot m^2$, $\lambda = 2,93 \cdot 10^{-8}\ kg \cdot m^{-1}$.

.B.3) La poutre étant toujours soumise aux efforts de pesanteur envisagés précédemment, elle est en outre soumise à une force $\vec{F} = F\vec{e_y}$ appliquée ponctuellement à son extrémité $x = L$.

a) Montrer que

$$\eta(L) = \frac{FL^3}{3C} - \frac{\lambda g L^4}{8C}. \qquad (4)$$

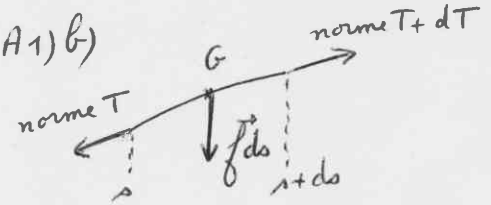
b) À partir de quelle valeur de F les effets de pesanteur peuvent-ils être négligés ? AN

c) *Application numérique :* Calculer numériquement le déplacement de l'extrémité libre pour $L = 100\ \mu m$, $g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$, $C = 2,12 \cdot 10^{-12}\ N \cdot m^2$, $\lambda = 2,93 \cdot 10^{-8}\ kg \cdot m^{-1}$, lorsqu'on applique une force $F = -10^{-8}\ N$ à l'extrémité de la poutre.

Centrale PC 00

A1)a) $\boxed{\vec{f} = -\lambda g \vec{e}_y}$ λ étant la masse de l'unité de longueur.

A1)b)



attention T n'est pas forcément tangente à la poutre.

Le vecteur $\vec{T}(s)$ représentant par définition la force exercée par la partie à droite de s, nous avons $\vec{T}_{(s)} + d\vec{T} - \vec{T}(s) + \vec{f}ds$ soit une résultante $\boxed{d\vec{T} - \lambda g ds \vec{e}_y}$

A1c). Le moment en G du poids est nul car P appliqué en G

- $\boxed{\text{Moment en G de } \vec{T}(s+ds) \text{ et } \vec{\Gamma}(s+ds): \quad \vec{\Gamma}(s+ds) + \vec{G\Pi'} \wedge \vec{T}(s+ds)}$
- $\boxed{\text{Moment en G de } -\vec{T}(s) \text{ et } -\vec{\Gamma}(s): \quad -\vec{\Gamma}(s) + \vec{G\Pi} \wedge (-\vec{T}(s))}$

Moment résultant : $d\vec{\Gamma} + \vec{G\Pi'} \wedge \vec{T}(s+ds) - \vec{G\Pi} \wedge \vec{T}(s)$

Or G est le milieu de $\Pi\Pi'$ avec $\vec{G\Pi'} // \vec{e}_t(s+ds)$, $\vec{G\Pi} // \vec{e}_t(s)$

avec $G\Pi \sim G\Pi' \sim \frac{ds}{2}$

donc $\vec{G\Pi'} \wedge \vec{T}(s+ds)$ a un effet de rotation sur le bout de poutre qui va dans le même sens que $-\vec{G\Pi} \wedge \vec{T}(s)$. La somme peut donc être approximée à $2 \times (-\vec{G\Pi} \wedge \vec{T}(s))$

c'à d à $2 \times (+\frac{ds}{2} \vec{e}_t(s)) \wedge \vec{T}(s)$

En résumé $\boxed{\text{le moment résultant est : } d\vec{\Gamma} + ds\, \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s)}$

IIA1d) Equilibre si la résultante des forces est nulle ainsi que le moment résultant :

$\boxed{d\vec{T} = \lambda g ds \vec{e}_y}$ (1) $\qquad \boxed{d\vec{\Gamma} + ds\, \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) = \vec{0}}$ (2)

IIA2a) Projetons (1) sur l'horizontale : $dT_x = 0$

donc $\boxed{T_x(s) = \vec{T}(s) \cdot \vec{e}_x = cte \overset{\text{not}}{=} T_0}$

IIA2b) Projetons (1') sur la verticale : $\boxed{dT_y = \lambda g ds}$ (1)

IIA2c) (2') donne $\boxed{\frac{d\vec{\Gamma}}{ds} + \vec{e}_t(s) \wedge \vec{T}(s) = \vec{0}}$ (2)

B1)a) $\theta \ll 1 \Rightarrow \boxed{ds \simeq dx}$

$\theta \ll 1 \Rightarrow \theta \simeq \tan\theta = y'(x)$ $\boxed{y'(x) = \theta}$

B1b) L'énoncé donne $\vec{\Gamma} = \frac{C}{ds} d\theta \vec{e}_z$ $\rightarrow \boxed{\vec{\Gamma} = C y'' \vec{e}_z}$

$\theta \ll 1 \Rightarrow \boxed{ds \simeq dx}$

B1c) $\vec{e}_t \wedge \vec{T} = \vec{e}_t \wedge (T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y) = \vec{e}_t \wedge (T_0 \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y)$

$\vec{e}_t \wedge \vec{T} = -T_0 \sin\theta \vec{e}_z + T_y \cos\theta \vec{e}_z$

avec $\theta \ll 1$ $\vec{e}_t \wedge \vec{T} = (-T_0 \theta + T_y) \vec{e}_z$

$= (-T_0 y' + T_y) \vec{e}_z$

(2) conduit ainsi à : $C y''' - T_0 y' + T_y = 0$

soit $\boxed{T_y = -C y''' + T_0 y'}$

B2a) Aucun élément n'est à droite de la poutre en L donc $\vec{T}(L) = \vec{0}$ soit $T_x(L) = T_y(L) = 0$ donc $\boxed{T_0 = 0 = T_y(L)}$

De même pour le couple $\boxed{\vec{\Gamma}(L) = \vec{0}}$

B2b) Intégrer (1) entre x et L ; $(ds \simeq dx)$

$[T_y]_{x=L}^{x} = \lambda g [x]_L^x \rightarrow \boxed{T_y(x) = \lambda g (x - L)}$

B2c). Enoncé : "la tangente à la poutre en x=0 est horizontale" donc $\theta_{(x=0)} = 0$

or $\theta = y'$ (cf B1a) donc $\boxed{y'(0) = 0}$

- Comme $\Gamma = C y''$ et que $\Gamma(L) = 0 \rightarrow \boxed{y''(L) = 0}$
- Comme $T_y = -C y''' + T_0 y'$, $T_y(L) = 0$ et $T_0 = 0$ $\Rightarrow \boxed{y'''(L) = 0}$

B2d) $\begin{cases} T_y = -C y''' & (\text{car } T_0 = 0) \\ T_y = \lambda g (x - L) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda g (x - L) = -C y'''}$

à intégrer 3 fois compte tenu des conditions limites obtenues en B2c, et sachant que $y(x=0) = 0$

1ère intégration entre L et x : $y'' = -\frac{\lambda g}{C} \left[\frac{(x-L)^2}{2}\right]_L^x = -\frac{\lambda g}{C} \cdot \frac{(x-L)^2}{2}$

2ème intégration entre 0 et x : $y' = -\frac{\lambda g}{2C} \left[\frac{(x-L)^3}{3}\right]_0^x = -\frac{\lambda g}{6C} \left[(x-L)^3 + L^3\right]$

3ème intégration entre 0 et x : $y = -\frac{\lambda g}{6C} \left[\frac{(x-L)^4}{4} + L^3 x - \frac{L^4}{4}\right]$

d'où $\boxed{y(x) = -\frac{\lambda g}{6C} \left[\frac{x^4}{4} - Lx^3 + \frac{3}{2} L^2 x^2\right]}$

(on vérifie l'homogénéité des termes ajoutés).

B2 e) $y(L) = -\frac{\lambda g}{6C}\left[\frac{L^4}{4} - L^4 + \frac{3}{2}L^4\right]$

$$\boxed{y(L) = -\frac{\lambda g L^4}{8C}} \quad < 0$$

B2 f) AN $y(L) = -\frac{2,93.10^{-8} \times 9,81}{8 \times 2,12.10^{-12}} \times (10^2 \times 10^{-6})^4$

$$\underline{y(L) = -1,7.10^{-12}\ m}$$

B3 a) Il faut reprendre l'intégration de (1) avec comme nouvelle condition limite $T_y(L) = F$

d'où $\boxed{T_y(x) = \lambda g (x - L) + F}$

on a toujours d'après B1 c) $T_y = -C y''' + T_0 y'$

avec $T_0 = 0$ car $T_x(L) = 0$

la force imposée en L n'étant que verticale donc on a toujours $T_y = -C y'''$

d'où $-C y''' = \lambda g (x - L) + F$

Les 3 intégrations menèrent à :

- 1ère intégration entre L et x : $+\frac{1}{C}(FL - Fx)$
- 2e 0 et x : $+\frac{1}{C}\left(FxL - \frac{1}{2}Fx^2\right)$
- 3e 0 et x : $+\frac{1}{C}\left(\frac{1}{2}FxL - \frac{1}{6}Fx^3\right)$

dont la valeur en L donne : $\left(\frac{1}{2}FL^3 - \frac{1}{6}FL^3\right)\left(\frac{1}{C}\right)$

soit $+\frac{1}{3}\frac{FL^3}{C}$

Soit $\boxed{y(L) = -\frac{\lambda g L^4}{8C} + \frac{1}{3}\frac{FL^3}{C}}$

B3 b). Les effets de la pesanteur pourront être négligés dès que $\frac{1}{3}\frac{FL^3}{C} \gg \frac{\lambda g L^4}{8C}$

. on va se donner un critère : rapport $\frac{1}{100}$

$$\rightarrow \frac{\lambda g L^4}{8C} \leq \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{3}\frac{FL^3}{C}$$

soit $\boxed{F \geq \frac{300}{8}\lambda g L}$ AN $F \geq \frac{300}{8} 2,93.10^{-8} \times 9,81 \times 100 \times 10^{-6}$

$$\underline{F \geq 10^{-9}\ N}$$

B3 c) AN La norme de F est telle que on peut négliger l'effet pesanteur.

$$y(L) = \frac{1}{3}\frac{FL^3}{C} = \frac{1}{3}\frac{10^{-8}.(100\times10^{-6})^3}{2,12.10^{-12}}$$

$$\underline{y(L) = -1,6\ nm}$$