

## La craie qui crisse

Lorsqu'on déplace une craie sur un tableau, il arrive qu'un son (désagréable) soit émis : la craie crisse. L'émission d'un tel son suppose qu'un phénomène périodique apparaisse, ce qui peut paraître surprenant puisque le système est sollicité par une excitation constante. Pour tenter d'éclaircir ce point on adopte le modèle représenté sur la figure 45 : un pavé de masse  $m$  est posé sur une table horizontale fixe et relié à une extrémité A d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide nulle dont l'autre extrémité B est déplacée à vitesse constante  $V$  par un moteur de telle sorte que son abscisse vaut  $x_B(t) = Vt + b_0$ . On repère le mouvement du pavé par l'abscisse  $x(t)$  du point A et on note  $\ell(t) = x_B(t) - x(t)$  la longueur du ressort.

Le champ de pesanteur  $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_z$  est uniforme avec  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Les actions de contact exercées par la table sur le pavé se réduisent à une force de contact  $\mathbf{R} = \bar{T}\mathbf{u}_x + \bar{N}\mathbf{u}_z$  satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement statique  $f_s$  et un coefficient de frottement dynamique  $f_d$ ; ces coefficients sont supposés différents et tels que  $f_d < f_s$ . On constate que le pavé peut se déplacer vers la droite avec une alternance de phases de glissement et de non-glissement; on parle alors de régime fixe-glisse (*stick-slip* en anglais) et dans ces conditions, l'allongement  $\ell$  du ressort a un comportement périodique décrit par le graphe expérimental de la figure 46 où on a tracé  $k\ell(t)/mg$  en fonction du temps  $t$  mesuré en secondes.

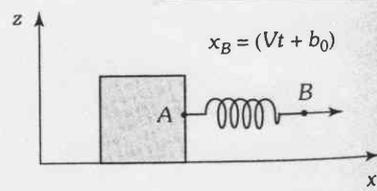


Figure 45

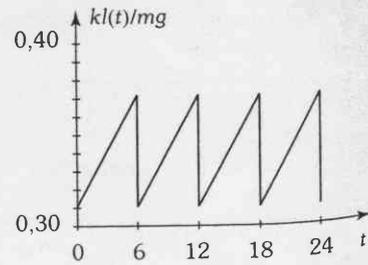


Figure 46

1. Établir l'expression de  $\bar{N}$  en fonction de  $m$  et  $g$  et une relation entre  $m$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{T}$ ,  $k$  et  $\ell$ .

2. On envisage une phase où le pavé est fixe sur le support.

a) Comment varie l'allongement  $\ell$  du ressort en fonction du temps ? Identifier une telle phase sur le graphe expérimental.

b) Exprimer  $\bar{T}$  en fonction de  $k$  et  $\ell$ . En déduire la valeur  $\ell_M$  de  $\ell$  en fonction de  $f_s$ ,  $m$ ,  $g$  et  $k$  au moment où le non-glissement cesse. Déduire du graphe expérimental la valeur numérique de  $f_s$ .

3. On prend comme origine des temps un instant où le pavé commence à se déplacer sur le support :  $\ell(t=0) = \ell_M$ ,  $x(t=0) = 0$  et  $\dot{x}(t=0) = 0$ . Pour  $0 \leq t \leq t_1$ , on a  $\ell(t > 0) = \ell_M + Vt - x(t)$  et  $x(t > 0) \geq 0$ .

a) Montrer que  $x(t)$  est solution de :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (f_s - f_d)g + \omega^2 Vt$$

où  $\omega$  est une constante qu'on exprimera en fonction de  $k$  et  $m$  et dont on donnera la signification physique.

b) Exprimer  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  en fonction de  $t$ ,  $\omega$ ,  $V$ ,  $f_s$ ,  $f_d$ .

c) En déduire que le glissement cesse à un instant  $t_1$  qu'on exprimera en fonction de  $\omega$ ,  $f_s$ ,  $f_d$ ,  $g$  et  $V$ . En remplaçant dans l'expression de  $x(t)$ , on obtient alors (calculs non demandés) :

$$\ell(t_1) = \ell_m = \frac{(2f_d - f_s)mg}{k}$$

Déduire du graphe de la figure 46 la valeur numérique de  $f_d$ .

d) Le graphe expérimental montre que la durée d'une phase de glissement est négligeable devant la durée d'une phase de non-glissement. Exprimer la fréquence  $\nu$  de  $\ell(t)$  en fonction de  $f_s$ ,  $f_d$ ,  $m$ ,  $g$  et  $V$ .

e) Dans le cas de la craie, on a  $\nu = 6 \text{ kHz}$  (son très aigu) pour  $m = 50 \text{ g}$  et  $V = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On suggère souvent de couper une craie en deux pour qu'elle ne crisse pas. Justifier l'efficacité du procédé.

4. Citer trois autres exemples basés sur ce même modèle :

- l'un se passe dans une maison
- l'un se passe sur la route
- l'un se passe lors d'un concert

1. Le pavé est en translation avec une accélération  $\mathbf{a}(G) = \mathbf{a}(A) = \ddot{x}\mathbf{u}_x$ . Il est soumis à son poids  $-mg\mathbf{u}_z$ , à l'action du ressort  $k\ell\mathbf{u}_x$  et à l'action de contact  $\mathbf{R} = \bar{T}\mathbf{u}_x + \bar{N}\mathbf{u}_z$  (Fig. 47). Le théorème de la résultante dynamique projeté sur  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_z$  s'écrit donc :

$$m\ddot{x} = k\ell + \bar{T} \quad (1) \quad \text{et} \quad 0 = \bar{N} - mg, \quad \text{soit} \quad \bar{N} = mg \quad (2)$$

Avec  $\bar{N} > 0$ , le pavé ne risque donc pas de décoller.

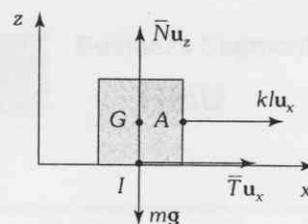


Figure 47

2.a) Le pavé est fixe, donc  $x(t) = x_0 = \text{cste}$  et la longueur du ressort vaut :

$$\ell(t) = Vt + b_0 - x_0, \quad \text{donc} : \quad \ell(t) \text{ est une fonction affine croissante du temps}$$

ce qui se traduit sur le graphe de la figure 46 par une droite de pente positive. On observe bien ce genre de comportement par exemple entre  $t = 0$  s et  $t = 6$  s.

b) Le pavé étant fixe, son accélération est nulle et l'équation (1) s'écrit :  $0 = k\ell + \bar{T}$ , soit :  $\bar{T} = -k\ell$ .

Comme le pavé se déplace en translation sur un support fixe, sa vitesse de glissement vaut  $\mathbf{v}_g = \dot{x}\mathbf{u}_x$ . Avec  $\dot{x} = 0$ , la vitesse de glissement est donc nulle. D'après les lois de Coulomb, cette phase n'est possible que tant que :

$$|\bar{T}| \leq f_s |\bar{N}|, \quad \text{soit} : \quad k|\ell| \leq f_s mg, \quad \text{ou encore} : \quad \ell \leq \ell_M = \frac{f_s mg}{k}$$

On lit sur le graphe de la figure 46 :

$$f_s = \frac{k\ell_M}{mg} = 0,37, \quad \text{ce qui est un bon ordre de grandeur.}$$

3.a) Il y a de nouveau glissement avec  $v_g = \dot{x} > 0$ , donc les lois de Coulomb imposent  $\bar{T} = -f_d |\bar{N}| = -f_d mg$ .

Avec  $\ell(t) = \ell_M + Vt - x(t)$ , l'équation (1) s'écrit :  $m\ddot{x} = k\ell - f_d mg = k(\ell_M + Vt - x) - f_d mg$ .

Soit en éliminant  $k\ell_M = f_s mg$  :  $m\ddot{x} = kVt - kx + (f_s - f_d)mg$ , puis :  $\ddot{x} + \omega^2 x = (f_s - f_d)g + \omega^2 Vt$

où  $\omega = \sqrt{k/m}$  est la pulsation propre des oscillations libres du système masse-ressort.

b) La solution générale de cette équation différentielle s'obtient en superposant la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière de l'équation avec second membre qu'on cherche sous la forme d'une fonction affine du temps :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + Vt + \frac{(f_s - f_d)g}{\omega^2}$$

On détermine les constantes A et B en exploitant les conditions initiales :  $0 = x(t=0) = A + \frac{(f_s - f_d)g}{\omega^2}$  et  $0 = \dot{x}(t=0) = B\omega + V$

D'où :  $B = -V/\omega$  et  $A = -(f_s - f_d)g/\omega^2$ , donc :

$$x(t) = \frac{(f_s - f_d)g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{V}{\omega} \sin \omega t + Vt \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = \frac{(f_s - f_d)g \sin \omega t}{\omega} - V \cos \omega t + V$$

c) Le glissement cesse à l'instant  $t_1$  où  $\dot{x}$  s'annule soit :

$$\frac{(f_s - f_d)g \sin \omega t_1}{\omega} - V \cos \omega t_1 + V = 0, \quad \text{puis} : \quad \frac{1 - \cos \omega t_1}{\sin \omega t_1} = -\frac{(f_s - f_d)g}{\omega V}$$

En passant à l'angle moitié, on vérifie que l'instant  $t_1$  existe toujours :

$$\frac{2 \sin^2(\omega t_1/2)}{2 \sin(\omega t_1/2) \cos(\omega t_1/2)} = -\frac{(f_s - f_d)g}{\omega V}, \quad \text{puis} : \quad \tan(\omega t_1/2) = -\frac{(f_s - f_d)g}{\omega V}$$

La valeur maximale  $x(t_1)$  de  $x(t)$  correspond à la valeur minimale  $\ell_m = \ell(t_1)$  de  $\ell(t) = \ell_M + Vt - x(t)$ . On lit sur le graphe :

$$\frac{k\ell_m}{mg} = 0,31, \quad \text{d'où} : \quad 2f_d - f_s = 0,31. \quad \text{Avec } f_s = 0,37 \text{ lu en 2.b), il vient : } \quad f_d = 0,34$$

de telle sorte que  $f_s$  et  $f_d$  ne diffèrent que de 10 % ; ceci valide l'approximation usuelle  $f_d \approx f_s$ .

d) La période  $\theta$  de  $\ell(t)$  est confondue avec le temps nécessaire pour que  $\ell(t)$  monte à vitesse constante  $V$  entre  $\ell_m$  et  $\ell_M$  soit :

$$V\theta = \ell_M - \ell_m = \frac{2(f_s - f_d)mg}{k}, \quad \text{puis} : \quad \nu = \frac{kV}{2mg(f_s - f_d)}$$

e) Lorsqu'on coupe un ressort en deux il s'allonge deux fois moins pour une traction donnée donc sa raideur double ; par ailleurs, sa masse est divisée par deux. Il résulte de la formule établie en 3.d) que la fréquence  $\nu$  du son émis est multipliée par 4 passant ainsi à la valeur  $\nu' = 4\nu = 24$  kHz, ce qui dépasse la bande passante de l'oreille humaine : le son désagréable n'est donc plus audible.