

Épreuve : PHYSIQUE I

Filière TSI

De l'oscillateur harmonique

Le problème analyse une expérience classique de travaux pratiques destinée à mettre en évidence un phénomène de résonance en mécanique. On considère un ressort vertical à spires non jointives dans son domaine de linéarité. Il est caractérisé par une masse linéique μ , une constante de raideur k , et un corps M , de masse m , est accroché à son extrémité inférieure. L'étude mécanique est faite dans le référentiel (R) du laboratoire supposé galiléen et les déplacements envisagés sont verticaux. On utilise les notations suivantes :

- $\vec{e}_x$, vecteur unitaire définissant la direction de l'axe $x'Ox$ et le sens de la verticale descendante,
- $\vec{g} = g\vec{e}_x$, champ de pesanteur uniforme,
- $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Partie I - Oscillations sans frottement

I.A - Oscillations libres (on prend $\mu = 0$). L'extrémité supérieure du ressort est fixe.

- I.A.1) Faire un bilan des forces appliquées à M .
- I.A.2) Déterminer l'équation différentielle (E_1) vérifiée par x , déplacement de M par rapport à la position d'équilibre, et sa solution pour les conditions initiales suivantes : $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.
- I.A.3) Proposer deux méthodes indépendantes permettant d'accéder à la valeur de k .
- I.A.4) Définir les deux énergies potentielles à considérer, en fonction de k , m , g et x en prenant comme référence la position d'équilibre $x = 0$.
- I.A.5) En déduire l'énergie potentielle totale E_p , en fonction de k et de x , et l'énergie mécanique E en prenant les conditions initiales du I.A.2.
- I.A.6) Tracer sur un même diagramme les courbes représentant les variations de E_p et de E en fonction de x et montrer comment on peut y lire la valeur de l'énergie cinétique E_c .

I.A.7) Montrer qu'en valeur moyenne il y a équi-partition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

I.B - Oscillations forcées (on prend $\mu = 0$)

Grâce à un système bielle-manivelle on impose à l'extrémité supérieure du ressort le déplacement $X(t)\vec{e}_x = a \cos \omega t \vec{e}_x$, a et ω étant des constantes.

I.B.1) Déterminer l'équation différentielle (E_2) du mouvement de M et montrer que l'existence de la sollicitation extérieure revient à introduire dans le bilan établi au I.A.2 un terme supplémentaire F_{sup} que l'on exprimera en fonction de k et de X .

I.B.2) On s'intéresse au cas $\omega \neq \omega_0$.

- a) Donner la solution de (E_2) avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Mettre le résultat sous la forme du produit de deux fonctions trigonométriques dont on exprimera les pulsations ω_1 et ω_2 , ($\omega_1 > \omega_2$) en fonction de ω et de ω_0 .
- b) Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de x en fonction du temps t pour $\omega = 1, 2 \cdot \omega_0$, définir et déterminer la période des battements en fonction de ω_2 .

c) Proposer une expérience de battements en optique (8 lignes maximum) en précisant son intérêt pratique. (Programme 2^{ème} années)

d) Soit la variation d'énergie mécanique par unité de temps $\frac{dE}{dt}$. L'énergie se conserve-t-elle ? Augmente-t-elle ? Diminue-t-elle ? Varie-t-elle en moyenne ? Réponse sans affecter de calcul.

I.B.3) On s'intéresse au cas $\omega = \omega_0$.

a) Déterminer la solution de (E_2) avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ par passage à la limite $\omega \rightarrow \omega_0$ de la solution obtenue au I.B.2-a).

b) Tracer la courbe représentant les variations de x en fonction du temps t . Donner l'équation des deux demi-droites enveloppes de la courbe.

c) Quel est le phénomène mis ainsi en évidence ? Qu'est-ce qui en limite l'acuité dans la réalité ? Donner un exemple d'un tel phénomène dans les domaines de l'acoustique, de l'électrocinétique, de l'optique.

d) Déterminer $E(t)$ et sa variation par unité de temps sur l'intervalle $[t, t + T_0]$ tel que $\sin \omega_0 t = 1$ et $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Conclure quant à la signification énergétique du phénomène. Pour la première fois.

Partie II - Oscillations forcées avec amortissement fluide

Grâce à un dispositif approprié on soumet M à une force de frottement fluide $\vec{F}_f$ de la forme $\vec{F}_f = -h\vec{v}$, h étant une constante positive et $\vec{v}$ représentant la vitesse de M . On impose toujours le déplacement $X(t) = a \cos \omega t$ à l'extrémité supérieure du ressort. On note

$$Q = \frac{m\omega_0}{h}$$

le facteur de qualité et on prend toujours $\mu = 0$.

II.A - Déterminer l'équation différentielle (E_3) du mouvement de M .

II.B - On s'intéresse à la solution en régime forcé. Quel est, en fonction de ω_0 et Q , l'ordre de grandeur du temps τ nécessaire pour considérer seulement cette solution ?

II.C - Montrer que l'amplitude A du déplacement de M s'exprime sous la forme :

$$A = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

II.D - Donner une interprétation physique du mouvement de M aux hautes et basses fréquences.

II.E - Montrer que, si Q est supérieur à une valeur minimale Q_{min} à déterminer, A prend une valeur maximale pour une pulsation ω_r à exprimer en fonction de ω_0 et Q .

II.F - Déterminer l'expression V de l'amplitude de la vitesse de M en fonction de a , ω , ω_0 et Q .

II.G - Donner une interprétation physique de la variation de V aux hautes et basses fréquences.

II.H - Montrer que V prend une valeur maximale pour une pulsation indépendante de Q .

II.I - Grâce à un capteur de position de M , on mesure une tension V_{pp} proportionnelle à l'amplitude A . À partir des valeurs expérimentales suivantes tracer les courbes représentant les variations de $V_{pp}(mV)$ et de $f \cdot V_{pp}(V \cdot Hz)$ en fonction de la fréquence $f(mHz)$.

Échelles : $1V \leftrightarrow 2 \text{ cm}$, $1V \cdot s^{-1} \leftrightarrow 1 \text{ cm}$, $1Hz \leftrightarrow 4 \text{ cm}$.

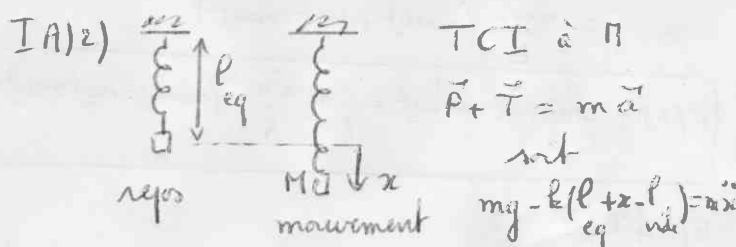
V_{pp}	1844	1844	1844	1844	1844	1906	2063	2281	2500	2906
f	156,3	213,9	287,8	412,4	615,4	869,6	1026	1250	1429	
$f \cdot V_{pp}$	0,228	0,394	0,531	0,760	1,173	1,794	2,340	3,125	4,153	
V_{pp}	3438	4094	4531	4938	5750	5906	5531	4188	3281	
f	1613	1786	1887	1923	2128	2198	2299	2500	2597	
$f \cdot V_{pp}$	5,545	7,312	8,550	9,496	12,24	12,98	12,71	10,47	8,521	
V_{pp}	3250	2813	2344	1812	1469	1094	1062			
f	2632	2778	2857	3077	3361	3636	3704			
$f \cdot V_{pp}$	8,554	7,814	6,697	5,575	4,937	3,978	3,934			

II.J - À l'évolution de quelle grandeur physique accède-t-on en traçant la courbe représentant les variations de $f \cdot V_{pp}$ en fonction de f ?

II.K - Définir la bande passante Δf . Déterminer graphiquement Δf et la fréquence propre f_0 associées à la fonction de transfert $H_0 : f \rightarrow f \cdot V_{pp}$. En déduire le facteur de qualité Q . Comparer ces valeurs aux résultats donnés par un logiciel de modélisation : $V_{pp}(0) = 1811 \pm 59 \text{ mV}$, $f_0 = 2228 \pm 12 \text{ mHz}$, $Q = 3,183 \pm 0,140$. Que penser du modèle proposé pour interpréter l'expérience ? Sachant que $m = 0,275 \text{ kg}$, calculer h .

II.L - Déterminer le schéma électrique équivalent, c'est-à-dire décrit par une équation différentielle du même type que (E_3), association d'une résistance R , d'une inductance L , d'une capacité C , alimentée par une source de courant idéale $I \cos \omega t$. Dresser un tableau d'analogies électromécaniques.

IA1) $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{T} = -k(l_{\text{Tot}} - l_{\text{vide}})\vec{e}_x$



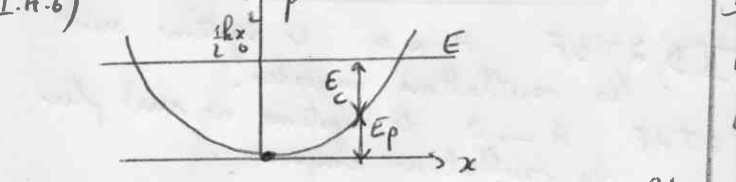
équation vérifiée aussi au repos : $mg - k(l_{\text{eq}} - l_{\text{vide}}) = 0$
 d'où en combinant les deux : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ (E1)
 Cond^m initiales x_0 et $\dot{x}_0 = 0 \rightarrow x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

IA3) On peut mesurer les périodes $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ pour différentes valeurs de m et tracer T en fonction de $\sqrt{m}$. La pente nous conduit à $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ donc à k .

Autre méthode : mesurer l'allongement $(l_{\text{eq}} - l_{\text{vide}})$ en fonction de différentes masses m et tracer $(l_{\text{eq}} - l_{\text{vide}})$ en fonction de m . La pente conduit à $\frac{1}{k}$ donc à k .

IA4) Energie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgx$ ($E_p = 0$ à $x = 0$)
 En. potentielle d'élasticité du ressort : $E_e = \frac{1}{2}k(l - l_{\text{vide}})^2$
 $E_e = \frac{1}{2}k(x + l_{\text{eq}} - l_{\text{vide}})^2 + \text{cte}$ avec $l_{\text{eq}} - l_{\text{vide}} = \frac{mg}{k}$
 $\rightarrow E_e = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + x\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$ ($E_e = 0$ à $x = 0$)

IA5) $E_p = E_p + E_e = -mgx + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + x\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$
 Cela se simplifie : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$
 $E_m = E = E_e + E_p \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$
 Avec $x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \rightarrow E = \frac{1}{2}kx_0^2$



E étant constante et $E = E_p + E_e$: On lit E_e comme la valeur complémentaire à ajouter à E_p pour arriver à E .

IA7) $\langle E_p \rangle = \frac{1}{2}k\langle x^2 \rangle = \frac{1}{4}kx_0^2$ (1)

$\langle E_e \rangle = \langle \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}x_0^2\langle \sin^2\sqrt{\frac{k}{m}}t \rangle = \frac{1}{4}kx_0^2$
 $\langle E_e \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4}kx_0^2 = \frac{E}{2}$ Il y a donc équipartition de l'énergie entre E_e et E_p .

IB1) Mêmes forces avec l_{Tot} modifiée en $l_{\text{eq}} + x - X(t)$

(E1) $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}X(t)$ (E2)
 Tout se passe comme si on avait en plus de $\vec{P} = m\vec{g}$ et de $\vec{T}$ (partie IA2) $= -k(l_{\text{eq}} + x - l_{\text{vide}})\vec{e}_x$ une force $\vec{F}_{\text{ny}} = -k(-X(t))\vec{e}_x$ $\boxed{\vec{F}_{\text{ny}} = kX\vec{e}_x}$

IB2a) Solution homogène $x_h = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$
 Solution particulière : $x = \alpha\cos\omega t$ devant vérifier (E2) càd $-\alpha(\omega^2 - \omega_0^2) = \omega_0^2 a$
 soit $\alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \rightarrow \boxed{x_p = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \cos\omega t}$

Solution globale : $x = x_p + x_h = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{\omega_0^2 a \cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}$

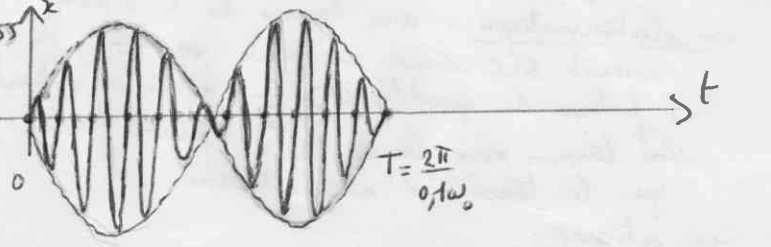
Avec les conditions initiales prévues (tout nul)
 $\rightarrow A = -\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a$ et $B = 0$

d'où $\boxed{x = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a [\cos\omega t - \cos\omega_0 t]}$

avec $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
 $\rightarrow x = \frac{2\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \sin\frac{(\omega - \omega_0)t}{2}$

$\boxed{x = \frac{2\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\omega_1 t \sin\omega_2 t}$ $\omega_1 = \frac{\omega + \omega_0}{2}$
 $\omega_2 = \frac{\omega - \omega_0}{2}$

IB2b) $\omega = 1,2\omega_0 \rightarrow x = +4,55 \sin(1,1\omega_0 t) \sin(0,1\omega_0 t)$
 L'une des fréquences est 11 fois plus grande que l'autre



on a 11 oscillations rapides dans 2 fuseaux
 $\leftarrow 1 \text{ fuseau} \rightarrow$ Période des battements $\boxed{\frac{\pi}{0,1\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_2}}$

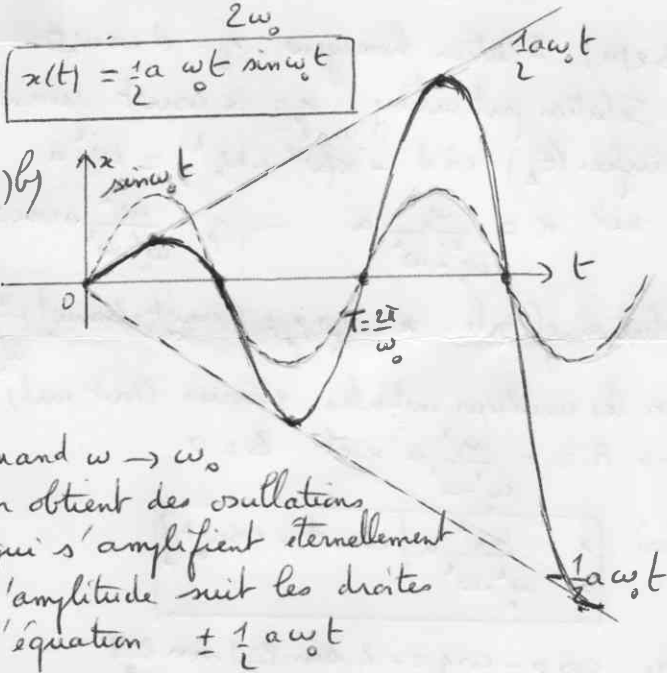
IB1)c) Quand on éclaire le Michelson par le doublet du sodium (longueurs d'onde très rapprochées) on obtient une intensité avec des battements. L'intérêt est de pouvoir mesurer avec précision la différence entre ces longueurs d'onde.

IB2)d) Le phénomène de battements se répète tous les $\frac{\pi}{\omega_2}$. Donc sur une période $\frac{\pi}{\omega_2}$ l'énergie se conserve en moyenne.

IB3)a) $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ et $\omega_2 \rightarrow 0$
 $\omega \rightarrow \omega_0$

d'où $x(t) \sim \frac{2\omega_0^2 a}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} \sin \omega_0 t + \omega_2 t$

Comme $\omega_2 = \frac{\omega_0 - \omega}{T}$
 $x(t) = \frac{\omega_0^2 a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t + t$



Quand $\omega \rightarrow \omega_0$ on obtient des oscillations qui s'amplifient éternellement. L'amplitude suit les droites d'équation $\pm \frac{1}{2} a \omega_0 t$.

IB3)c) on met en évidence le phénomène de résonance.

Limites réelles : les frottements ; les brisures (loi de Hooke $T = k \times \text{allongement}$) valable seulement pour des allongements pas trop grands.

en acoustique : pour accorder une corde d'instrument on peut jouer 2 notes séparées d'octave si on entend des battements alors elles ne sont pas tout-à-fait accordées.

en électrocinétique : aux bornes de C d'un circuit RLC série alimenté en ω , si le facteur de qualité $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors on obtient une tension aux bornes de C plus forte que la tension d'alimentation.

en optique :

IB3)d)

$$E(t) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

avec $\ddot{z} = \frac{a\omega_0}{2} (\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t)$

$$E(t) = \frac{1}{2} k a^2 \frac{\omega_0^2}{4} t^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} m a^2 \frac{\omega_0^2}{4} (\sin \omega_0 t + \omega_0 t \cos \omega_0 t)^2$$

$$E(t + T_0) =$$

Pour $\sin \omega_0 t = 1$ on aura aussi $\sin \omega_0 (t + T) = 1$ et on aura $\cos \omega_0 t = 0$ et $\cos \omega_0 (t + T) = 0$

d'où $E(t) = \frac{1}{2} k a^2 \frac{\omega_0^2}{4} t^2 + \frac{1}{2} m a^2 \frac{\omega_0^2}{4}$

et $E(t + T) = \frac{1}{2} k a^2 \frac{\omega_0^2}{4} (t + T_0)^2 + \frac{1}{2} m a^2 \frac{\omega_0^2}{4}$

soit $E(t + T) - E(t) = \frac{1}{2} k a^2 \frac{\omega_0^2}{4} ((t + T_0)^2 - t^2)$

$\sin \omega_0 t = 1$ pour la 1^{ère} fois à $t = \frac{T_0}{4}$

d'où $\Delta E(t) = \frac{3}{4} T_0 \times \frac{1}{8} k a^2 \omega_0^2$

$$\frac{\Delta E}{T_0} = \frac{3}{4} T_0 \frac{1}{8} k a^2 \omega_0^2 = \frac{3}{8} \frac{k a^2 \pi^2}{T_0}$$

L'énergie augmentera à chaque période.

II A) Il suffit d'ajouter $\vec{F}_f$ à (E_2)

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{h}{m} X \quad (E_3)$$

$$\text{II B)} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos \omega t \quad (E_3)$$

Solution transitoire en $e^{-\frac{t\omega_0}{2Q}}$

négligeable pour $t > \tau$ où $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

II C) Soit en régime forcé $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

càd en complexe $\underline{x} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$

alors $(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}) A e^{j\varphi} = a \omega_0^2$

d'où $A = \frac{a}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$

II D) à TBF : $A \sim a$ le système suit les oscillations imposées.

à THF : $A \rightarrow 0$ le système ne suit plus les oscillations imposées.

II E) A prend une valeur maximale si son dénominateur passe par un minimum

Soit $y = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, le dénominateur est minimal

si $(1 - y)^2 + \frac{1}{Q^2} y$ est minimal

soit lorsque sa dérivée s'annule ; c-à-d
pour $-2(1-y) + \frac{1}{Q^2} = 0$

Il faut donc $y = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

Mais $y = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 0$ oblige $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$

L'extremum (max admis) de A n'est possible
que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$Q_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

alors l'extremum a lieu pour $\frac{\omega_n}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

II F) On a donc obtenu l'amplitude A de
 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ associé à $\underline{x} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$
d'où $\underline{v} = j\omega A e^{j(\omega t + \varphi)}$ soit $V = \omega A$

$$V = \frac{a\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

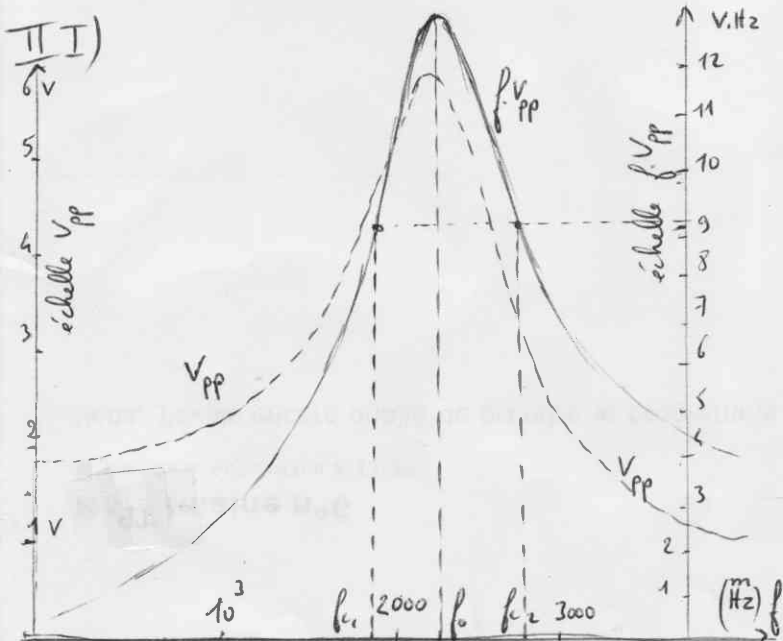
II G) à TBF $V = a\omega \rightarrow 0$
à THF $V \rightarrow 0$ (oscillateur sans oscillation)

II H) Supprimons ω au numérateur en divisant
par ω le numérateur et le dénominateur :

$$\rightarrow V = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{\omega_0^2 Q^2}}}$$

Écrit ainsi, on voit aisément que V est
max pour $\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right) = 0$ c-à-d $\boxed{\omega = \omega_0}$

V max pour ω_0 (indépendante de Q)



II J) Comme V_{PP} est proportionnelle à A (3)
 $[f V_{PP} \text{ est proportionnelle à } V] \quad (f = \frac{\omega}{2\pi})$

II K) V est un passe-bande ;
on cherche $f V_{PP}(f_c) = (f V_{PP})_{\max} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

or $(f V_{PP})_{\max} \approx 13$ donc $\frac{13}{\sqrt{2}} = 9,2 \text{ V.Hz}$

d'où les 2 fréquences de coupure lues sur
le graphe ; on lit $f_{c1} = 1,8 \text{ Hz}$ $f_{c2} = 2,7 \text{ Hz}$
soit $\Delta f = 0,9 \text{ Hz}$

on lit $f_0 = 2,3 \text{ Hz}$

d'où $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 2,6$

Δf et f_0 tombent bien dans l'intervalle
du logiciel de modélisation.

Par contre Q trouvé graphiquement est en
dehors de l'intervalle donné par le logiciel
de modélisation sur Q.
Cela peut venir d'une lecture approximative
du graphe - le modèle proposé semble
convenir.

Equations canoniques : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$
 $\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$

d'où $\underline{h} = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{0,275 \times 2\pi \times 23}{2,6} = 1,5 \text{ N.m}^{-1}\text{s}$

II L)

$i = I \cos \omega t$
 $i = i_R + i_L + i_C$
 $i = \frac{u}{R} + i_L + C \dot{u}$

Mécanique	Electronique	
x	i_L	$i = LC \ddot{u} + \frac{L}{R} \dot{u} + u$
h	$\frac{1}{R}$	$X = \frac{m}{h} \ddot{x} + \frac{h}{h} \dot{x} + x$
m	C	
h	$\frac{1}{L}$	