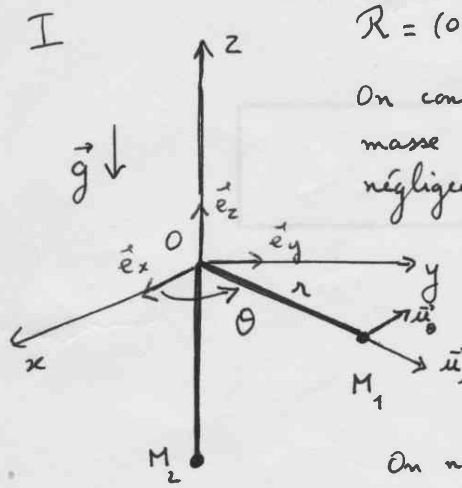
I



$R = (O, x, y, z)$ galiléen Oz vertical

On considère un système de 2 masses ponctuelles en M_1 et M_2, de masse m_1 et m_2, reliées par un fil souple inextensible de masse négligeable, de longueur ℓ.

M_1 est astreinte à se déplacer sans frottement dans le plan Oxy

M_2 est astreinte à se déplacer sans frottement sur l'axe Oz ($z<0$)

Le fil passe par O où le plan est percé d'un trou.

La position de M_1 est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ) celle de M_2 par sa cote z.

On notera $T\vec{u}_r$ la force exercée par le fil sur M_1. Comme le fil est sans masse et que le contact en O est sans frottement, la valeur absolue de cette tension se retrouve en M_2.

Enfin, $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ sont les forces de liaison exercées respectivement sur M_1 et M_2.

1) Que peut-on dire de $\vec{R}_1$ et de $\vec{R}_2$ du fait du non-frottement ?
2) Quelle est la relation existant entre les paramètres de position de M_1 et de M_2 lorsque le fil est tendu ?
3) Rappeler sans démonstration l'expression de l'accélération de M_1.
4) Déterminer la relation entre $\dot{z}$ et $\dot{r}$ lorsque le fil reste tendu.
5) On étudie le mouvement lorsque M_1 est lancée à $t=0$ avec $\begin{cases}\dot{\theta}_0 = 0\\ r = r_0\end{cases}$, et M_2 avec $\dot{z}_0 = 0$

On suppose que le fil reste tendu.
   a) Quelle valeur donner à $\dot{r}_0$ pour qu'il en soit ainsi ?
   b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à M_1, puis à M_2.
   c) En déduire les équations de mouvement de M_1 et de M_2, c à d les équations différentielles où figurent les paramètres de position de M_1 et M_2 et leurs dérivées temporelles.
   d) Montrer qu'il existe une solution des équations telles que $\forall t \geq 0$, $\dot{\theta} = 0$.
   Quelle est alors la trajectoire de M_1 ? Déterminer la loi de son mouvement.
   Déterminer T (valeur algébrique). Le fil peut-il se détendre au cours du mouvement ?
6) On étudie le mouvement avec cette fois $\dot{\theta}_0 \neq 0$.
   a) Le fil est d'abord tendu, $\dot{r}_0 = \dot{z}_0$. Montrer qu'une des équations différentielles où figure θ s'intègre une première fois.
   Déterminer T en fonction de r et des conditions initiales. Le fil peut-il se détendre ?
   b) Existe-t-il des mouvements à r constant ? Quelles relations doivent vérifier les conditions initiales pour en être ainsi ? Quelle est alors la loi du mouvement de M_1 sur sa trajectoire ?

I (Ensi 89)

1) $\vec R_1$ et $\vec R_2$ $\perp$ support $\Rightarrow$ $\boxed{\vec R_1 \parallel \vec e_z}$ $\boxed{\vec R_2 \perp \vec e_z}$

2) $\boxed{\ell = |z| + r = -z + r}$

3) $\boxed{\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec u_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\vec u_\theta}$

4) fil tendu (2) à dériver $0 = -\dot z + \dot r$ $\boxed{\text{fil tendu} \Leftrightarrow \dot z = \dot r}$

5) a) fil tendu $\Leftrightarrow \forall t\ \dot z = \dot r$, donc à $t = 0$ $\boxed{\dot r_0 = \dot z_0 = 0}$

b) T.C.I à M_1 : $\vec P_1 + \vec R_1 + \vec T_1 = m_1 \vec a_1$ avec $\vec T_1 = T\vec u_r$ $(T < 0)$

M_2 : $\vec P_2 + (\vec R_2) + \vec T_2 = m_2 \vec a_2$ $\quad \vec T_2 = -T\vec e_z$

c) Projection sur

$$\begin{array}{l|l} \vec u_r : & T = m_1(\ddot r - r\dot\theta^2) \quad (1) \\ \vec u_\theta : & 0 = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta \quad (2) \\ \vec e_z : & -m_2 g - T = m_2 \ddot z \quad (3) \end{array}$$

T algébrique

d) On se fixe $\dot\theta = 0 \overset{c)}{\Rightarrow} \begin{cases} T = m_1 \ddot r \\ -m_2 g - T = m_2 \ddot z \end{cases}$ ajouter $\Rightarrow -m_2 g = (m_1 + m_2)\ddot r$

Hyp : le fil est tendu $\Rightarrow \ddot z = \ddot r$

$$\boxed{\ddot r = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g}$$

intégrer $\Rightarrow$ $\boxed{\dot r = -\frac{m_2}{m_1+m_2} g t + \cancel{\dot r_0}}$ $\xrightarrow{\text{intégrer}}$ $\boxed{r = -\frac{m_2}{2(m_1+m_2)} g t^2 + r_0}$

$\boxed{T = m_1 \ddot r = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$ toujours $< 0 \Rightarrow$ <u>le fil ne se détend pas</u>

6) a) m̂ équa diff. qu'en 5) c) intégrer la (2) en $\boxed{r^2\dot\theta = \text{Cste} = r_0^2\dot\theta_0}$

(1) $\Rightarrow T = m_1\left(\ddot r - r\frac{r_0^4\dot\theta_0^2}{r^4}\right)$ $\times(m_2)$

(3) $\Rightarrow T = -m_2(g + \ddot z)$ $\times(m_1)$ $\Rightarrow$ $(m_2 + m_1)T = -m_1 m_2 \frac{r_0^4\dot\theta_0^2}{r^3} - m_1 m_2 g$

fil tendu $\Rightarrow \dot z = \dot r$ ou $\ddot z = \ddot r$ — pour éliminer les termes en $\ddot z$ et $\ddot r$

$$\boxed{T = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[g + \frac{r_0^4\dot\theta_0^2}{r^3}\right]}$$

<u>$\forall t$, $T < 0 \Rightarrow$ le fil ne peut pas se détendre</u>

b) si $r = \text{Cste}$ alors $r = r_0$

(1) $T = -m_1 r_0 \dot\theta^2$

(2) $r\ddot\theta = 0$

(3) $-m_2 g - T = m_2 \ddot z$

fil tendu : $\dot r = \dot z$, $r = \text{Cste}$ $\Rightarrow \dot r = \dot z = 0$ et $\ddot z = 0$

$\Rightarrow$ $T = -m_1 r_0 \dot\theta^2$, $\dot\theta = \text{Cste} = \dot\theta_0$ $\Rightarrow T = -m_1 r_0 \dot\theta_0^2$

$\Rightarrow T = -m_2 g$

C.N : $\boxed{m_1 r_0 \dot\theta_0^2 = m_2 g}$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} r = r_0 = \text{Cste} \\ \dot\theta = \text{Cste} = \dot\theta_0 \end{array}}$ $\Rightarrow$ <u>M_1 décrit un cercle à vit. ang. uniforme</u>