

Après une étude cinématique très succincte relative à deux écoulements particuliers et qui n'est qu'un outil pour la suite, cette partie propose une modélisation de l'écoulement de l'air autour d'une aile afin d'en tirer quelques conséquences sur les actions qu'elle subit.

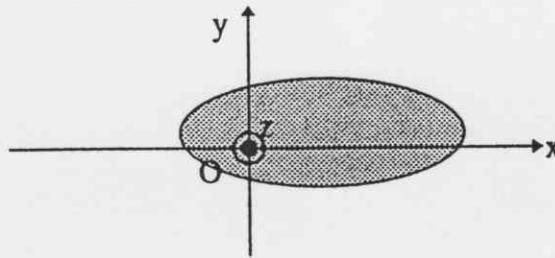
Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  en écoulement stationnaire sur lequel la pesanteur aura une influence négligeable. Sauf indication contraire, ce fluide sera supposé parfait.

Les obstacles solides introduits dans cet écoulement seront à géométrie cylindrique (de base a priori quelconque), avec des génératrices parallèles à l'axe Oz perpendiculaire au plan de figure Oxy. On se limitera à une étude bidimensionnelle dans ce plan, les phénomènes étant supposés invariants par translation selon Oz.

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  désignera la base orthonormée directe associée au repère Oxyz.

Les coordonnées cylindriques d'axe polaire Oz seront notées  $r, \theta$  et  $z$  avec Ox pour origine des angles.

L'écoulement du fluide en un point M sera décrit par sa vitesse eulérienne  $\vec{v}(M)$ .



**0. Etude cinématique de deux écoulements particuliers.**

0.1. Ecoulement tourbillonnaire.

On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire Oz appelé tourbillon tel que :

pour  $r < a, \vec{\text{Rot}}[\vec{v}(M)] = \gamma \cdot \vec{e}_z$  où  $\gamma$  est une constante algébrique.

pour  $r > a \vec{\text{Rot}}[\vec{v}(M)] = \vec{0}$ .

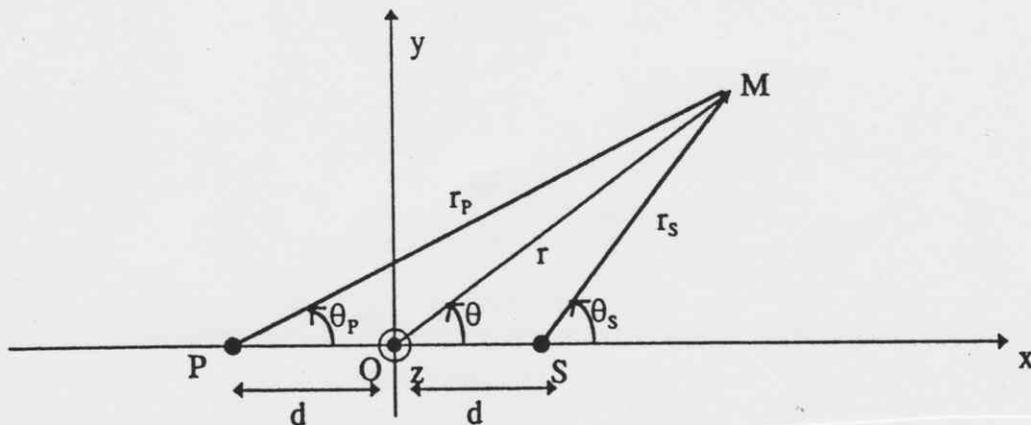
Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan Oxy si l'on considère que si  $a \rightarrow 0$  et  $\gamma \rightarrow \infty$ , le produit  $\pi a^2 \gamma$  demeure égal à la valeur finie  $\Gamma$  que l'on nomme intensité du tourbillon.

Etablir l'expression de  $\vec{v}(M)$  en coordonnées polaires ( $r > a$ ) avec  $\Gamma$  comme paramètre.

A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

0.2. Ecoulement d'un doublet

On considère un écoulement engendré par un doublet résultant de l'association d'une source et d'un puits.



a. La source se situe le long de l'axe Sz, parallèle à Oz tel que le point S, placé dans le plan Oxy, ait pour coordonnées  $(d > 0, 0)$ . L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit  $D$  par unité de longueur. L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on ferait circuler de l'eau sous pression.

Etablir l'expression de la vitesse  $\vec{v}_S(M)$  du fluide en coordonnées cylindriques  $(r_s, \theta_s, z)$  d'axe polaire Sz ainsi que le potentiel  $\varphi_S(M)$  associé défini par  $\vec{v}_S(M) = \overrightarrow{\text{grad}}[\varphi_S(M)]$ .

b. Le puits se situe le long de l'axe Pz, parallèle à Oz tel que le point P situé dans le plan Oxy ait pour coordonnées  $(-d, 0)$ . Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également  $D$ .

Donner sans démonstration l'expression de la vitesse  $\vec{v}_P(M)$  du fluide en coordonnées cylindriques  $(r_p, \theta_p, z)$  d'axe polaire Pz ainsi que le potentiel  $\varphi_P(M)$  associé.

c. Soit  $\varphi(M)$  le potentiel des vitesses dans le cas où l'on associe la source et le puits pour former un doublet pour lequel  $d \rightarrow 0$  et  $D \rightarrow \infty$  de sorte que le produit  $2Dd$  demeure égal à la valeur finie  $H$  que l'on nommera intensité du doublet. On prendra le potentiel nul en  $O$ .

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  d'axe polaire Oz, montrer que  $\varphi(M) = -\frac{H \cos \theta}{2\pi r}$ .

En déduire l'expression en coordonnées cylindriques de la vitesse  $\vec{v}(M)$  créée par ce doublet avec  $H$  comme paramètre.

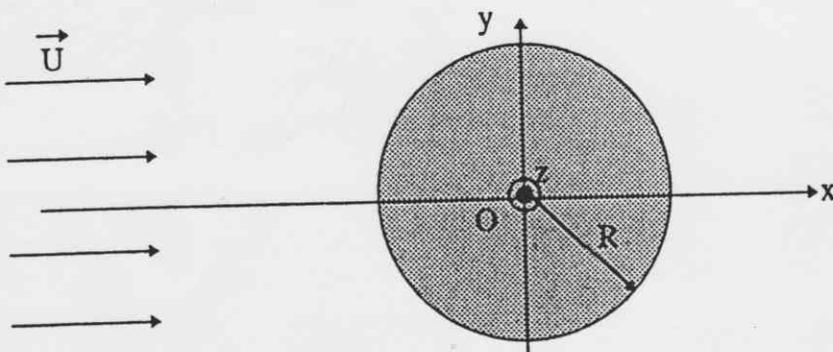
d. A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

Dans la suite le paramètre  $H$  sera considéré comme une grandeur algébrique, c'est à dire que les positions du puits et de la source pourront être inversées.

### 1. Ecoulement autour d'un cylindre en rotation.

Un cylindre à base circulaire de rayon  $R$  et en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe Oz est placé dans l'air dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à la vitesse uniforme

$\vec{U} = U \cdot \vec{e}_x$  et à la pression  $P_0$ .



Pour étudier l'effet du cylindre sur le fluide nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'intérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :

Un doublet d'axe Oz et d'intensité  $H$  qui engendre un champ de vitesse  $\vec{v}_D(M)$ .

Un tourbillon également d'axe Oz et d'intensité  $\Gamma$  qui engendre un champ de vitesse  $\vec{v}_T(M)$ .

On pose alors  $\vec{v}(M) = \vec{v}_T(M) + \vec{v}_D(M) + \vec{U}$  en tout point  $M$  de l'écoulement.

### 1.1. Etude cinématique.

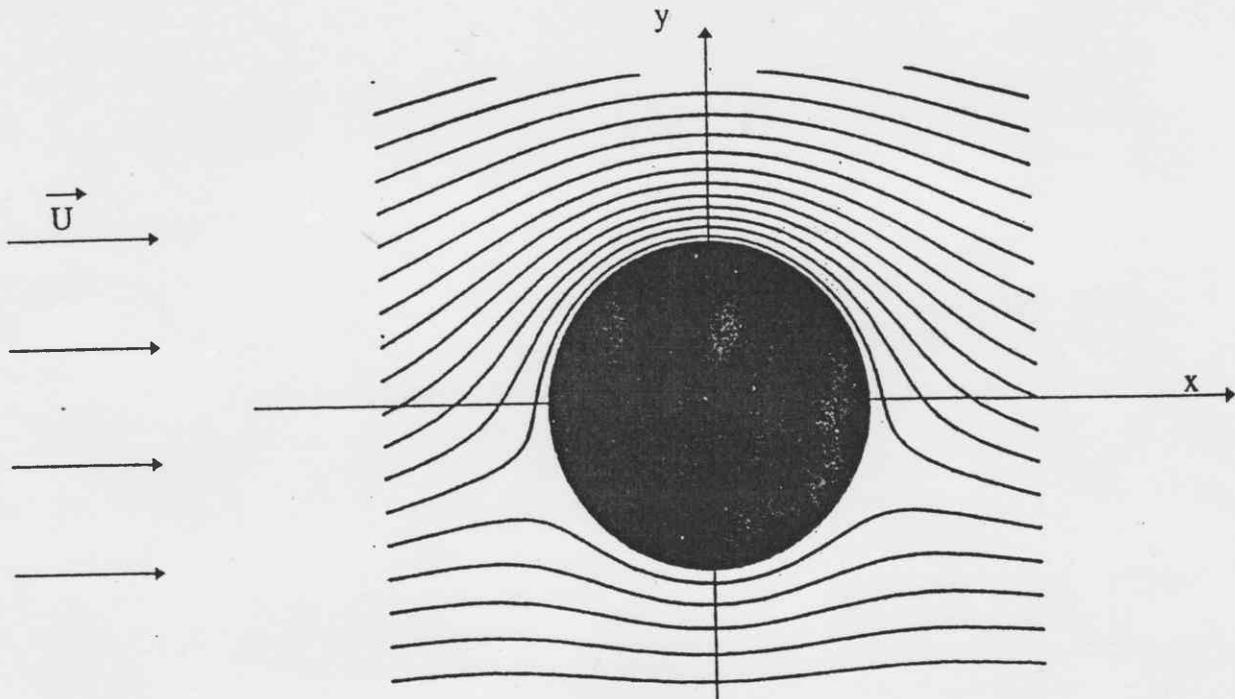
Les coordonnées polaires de la vitesse  $\vec{v}$  de cet écoulement ont pour expression :

$$v_r = U \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad v_\theta = -U \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

En s'appuyant sur des résultats établis précédemment, justifier ces expressions en explicitant le paramètre H en fonction de R et de U.

### 1.2. Etude dynamique.

On donne ci-dessous le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de U, R et  $\Gamma$ .



a. Comparer qualitativement le module  $v$  de la vitesse  $\vec{v}$  du fluide pour les points situés sur l'axe Oy selon que  $y > R$  ou  $y < -R$ .

b. Indiquer le signe de  $\Gamma$  et préciser si le sens de rotation du cylindre est horaire ou antihoraire.

c. En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de points d'arrêt du fluide à la surface du cylindre. Donner  $|\Gamma|$  en fonction des paramètres U, R et du sinus d'un angle géométrique  $\theta_A$  dont on précisera dans ce cas la valeur numérique approchée en degrés.

d. Exprimer la pression  $P(\theta)$  à la surface du cylindre avec U,  $\rho$ , R,  $\Gamma$  et  $P_0$  comme paramètres.

e. Soit  $\vec{F}$  la résultante de pression de l'air sur le cylindre.

Donner, sans calcul mais en les justifiant, la valeur de la composante  $F_x$  et celle du moment par rapport à l'axe Oz de cette action.

f. Le cylindre ayant une hauteur h, établir l'expression de la composante  $F_y$  de  $\vec{F}$  en fonction de  $\rho$ , U,  $\Gamma$  et h puis de  $\rho$ , U, R,  $\sin \theta_A$  et h. Commenter en précisant les applications envisageables dans certains sports.

Donner une valeur approchée de  $F_y$  pour les valeurs numériques suivantes :  $U = 15 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$  et  $\rho = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

0.1) Th Stokes  $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S}$

où C est un contour fermé  
S est une surface s'appuyant sur C

$\vec{v}$  est par hyp. orthoradiale; supposons  $v(r)$   
alors  $v(r) 2\pi r = \gamma \pi a^2$  pour  $r > a$

Posons  $\Gamma = \pi a^2 \gamma$  :  $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{u}_\theta$   $r > a$

Cela fait penser à  $\vec{B}$  dû à un fil  $\infty$  cylindrique parcouru par  $i$  tel que  $\Gamma = \mu_0 i$

0.2) a) Un seul point source S émet du liquide avec un débit

$D = 2\pi r v \frac{dt}{dt}$  donc  $\vec{v}_S = \frac{D}{2\pi r_S} \vec{u}_{r_S}$

Ce qui peut s'écrire  $\vec{v}_S = \text{grad} \left( \frac{D \ln r_S}{2\pi} + cte \right)$

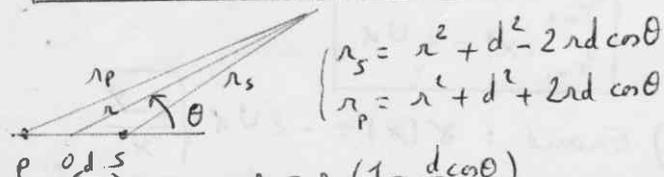
$\vec{v}_S = \text{grad} \varphi_S$  avec  $\varphi_S = \frac{D \ln r_S}{2\pi} + cte$

0.2) b) Pour le puits il suffit de changer le signe

$\vec{v}_P = -\frac{D}{2\pi r_P} \vec{u}_{r_P}$   $\varphi_P = -\frac{D \ln r_P}{2\pi} + cte$

0.2) c) Superposition de la source S et du puits P:

$\varphi(r) = \varphi_S + \varphi_P = \frac{D}{2\pi} \ln \frac{r_S}{r_P}$  ( $\varphi = 0$  en 0)



d.p. ordre 1 :  $r_S = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$   
 $r_P = r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta$

donc  $\frac{r_S}{r_P} = \frac{1 - \frac{d}{r} \cos \theta}{1 + \frac{d}{r} \cos \theta} = \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta\right)$   
 $\frac{r_S}{r_P} = 1 - \frac{2d}{r} \cos \theta$

soit  $\ln \frac{r_S}{r_P} = -\frac{2d}{r} \cos \theta$  d'où  $\varphi(r) = -\frac{Dd}{\pi r} \cos \theta$

Énoncé:  $H = 2Dd$  d'où  $\varphi(r) = -\frac{H \cos \theta}{2\pi r}$

$\vec{v} = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$

$\vec{v} = \frac{H}{2\pi r^2} [\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta]$

0.2) d) Cela ressemble au champ  $\vec{E}$  créé par un doublet de charges  $-q + q$ , à ceci près que ce champ varierait en  $\frac{1}{r^3}$  et non en  $\frac{1}{r^2}$ .

Par contre on peut envisager un doublet de fils  $\infty$  chargés linéairement  $-\lambda + \lambda$  et alors l'analogie est convenable.

1) 1)  $\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_D + \vec{U}$  d'après l'énoncé  
On vient de trouver  $\vec{v}_D = \frac{H}{2\pi r^2} [\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta]$

et  $\vec{v}_T = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

L'énoncé donne  $\vec{U} = U \vec{e}_x = U(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$

Ainsi  $\vec{v} = \left(\frac{H}{2\pi r^2} \cos \theta + U \cos \theta\right) \vec{u}_r + \left(\frac{H}{2\pi r^2} \sin \theta - U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right) \vec{u}_\theta$

Si on veut trouver  $v_r = U(1 - \frac{R^2}{r^2}) \cos \theta$

et  $v_\theta = -U(1 + \frac{R^2}{r^2}) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

il faut que  $-UR^2 = \frac{H}{2\pi}$  c'est à dire  $H = -2\pi UR^2$

1) 2) a) Fluide incompressible  $\Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0$   
(de  $\vec{m}$  que  $\text{div} \vec{B} = 0$ ) alors la vitesse est plus grande là où les lignes de courant  $\vec{v}$  se resserrent. Ainsi  $v(y > R) > v(y < R)$

1) 2) b) Pour entraîner plus vite les particules fluides pour  $y > R$ , il faut que le cylindre tourne dans le sens horaire

Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $v_\theta = -U(1 + \frac{R^2}{r^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

mais comme  $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_x$  cela donne  $v_\theta < 0$

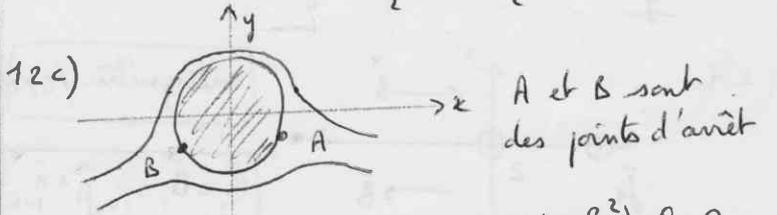
Le module de la vitesse est alors  $v_{\theta = \frac{\pi}{2}} = U(1 + \frac{R^2}{r^2}) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$

Pour  $\theta = -\frac{\pi}{2}$   $v_\theta = +U(1 + \frac{R^2}{r^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

et comme  $\vec{u}_\theta = +\vec{u}_x$  cela donne  $v_\theta > 0$

Le module de la vitesse est alors  $v_{\theta = -\frac{\pi}{2}} = U(1 + \frac{R^2}{r^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

Comme on sait que  $v_{\theta = \frac{\pi}{2}} > v_{\theta = -\frac{\pi}{2}}$  il faut  $\Gamma < 0$



Pour  $r = R \forall \theta$  on a  $v_r = U(1 - \frac{R^2}{r^2}) \cos \theta = 0$

Pour  $r = R$  et  $\theta_A = -30^\circ$  ou  $\theta_B = -150^\circ$  on a  $v_\theta = 0$  aussi.

$-U(1 + \frac{R^2}{r^2}) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$

soit  $|\Gamma| = -\Gamma = -4\pi R U \sin(-30^\circ) = 4\pi R U \sin 30^\circ$

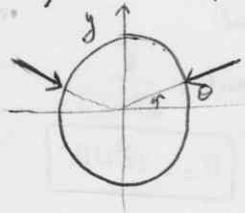
1.2 d) Fluide parfait incompressible, écoulement stationnaire  
 → Bernoulli le long d'une ligne de courant, d'un point infini où on a  $p_0$  et  $U$  en un point du cylindre où on a  $p(\theta)$  et  $v_\theta$  (car  $v_r = 0$  pour  $r = R$ )

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p_0 = \frac{1}{2} \rho v_\theta^2 + p(\theta)$$

$$\text{d'où } p(\theta) = \frac{1}{2} \rho \left[ U^2 - \left( -U \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] + p_0$$

$$p(\theta) = p_0 + \frac{\rho}{2} \left[ U^2 - \left( \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2U \sin \theta \right)^2 \right]$$

1.2 e) On remarque que  $p(\theta) = p(\pi - \theta)$



Les faces pressantes présentent  
 → donc une symétrie par rapport à  $Oy$ . Ainsi  $F_x = 0$   
 et  $\frac{dF_x}{dt} = 0$

1.2 f)  $F_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(\theta) R d\theta h \times 2 \sin \theta$  le facteur 2 provient de la symétrie /  $Oy$   
 Ainsi, on intègre seulement entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ .

$$F_y = 2p_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \cos^2 \theta \right]_{\frac{R^2}{r^2}} - PRh \left( -U^2 \left[ \cos^2 \theta \right]_{\frac{R^2}{r^2}} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} \left[ \cos^2 \theta \right]_{\frac{R^2}{r^2}} + \frac{2\Gamma U}{\pi R} \left[ \theta \right]_{\frac{R^2}{r^2}} \right) + \frac{2\rho U}{\pi R} \left( -\frac{\sin 2\theta}{4} \right)_{\frac{R^2}{r^2}} - 4U^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta$$

$$F_y = -PRh \left( \frac{2\Gamma U}{2R} - 4U^2 \times 0 \right)$$

$$\text{car } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$F_y = -\rho h \Gamma U$$

$$\Gamma = 4\pi R U \sin \theta_A$$

$$F_y = -\rho h 4\pi R U^2 \sin \theta_A$$

Pour  $\theta_A = -30^\circ$  on a

Ainsi  $F_y > 0$