PROBLÈME I

Nous nous proposons d'étudier une solution originale pour le chauffage électrique d'une maison destinée à l'habitation principale d'une famille de 4 personnes.

Cette maison est d'un type très courant; toutefois, grâce à une isolation thermique bien étudiée (isolation au sol et à la toiture, doubles fenêtres), les pertes thermiques ont été réduites à une valeur raisonnable; durant la période habituelle de chauffage (8 mois), la quantité de chaleur nécessaire au chauffage s'élève à environ 5×10^6 kilocalories. Le chauffage se fait par le sol grâce à un circuit d'eau chaude à 30-35 °C.

L'énergie de chauffage est obtenue principalement en prélevant de la chaleur aux eaux usées grâce à une pompe à chaleur. Durant les nuits froides de l'hiver et d'une manière générale chaque fois que la température descend au-dessous de 5 °C, la pompe à chaleur n'apportant pas l'énergie de chauffage suffisante, on lui associe alors un chauffage électrique d'appoint.

La consommation moyenne en eau (eau froide + eau chaude) est assez régulière; elle est d'environ 0,7 m³ par jour. Les eaux usées domestiques disponibles (soit environ 0,7 m³) sont versées dans un bac à décantation pouvant retenir jusqu'à 1,5 m³ d'eaux usées. La température moyenne de ces eaux retenues est de 25 °C.

Le chauffage principal est obtenu en prélevant de la chaleur à ces eaux usées grâce à une pompe à chaleur à fréon 22 (difluoro-monochlorométhane) dont le schéma est représenté figure 1.

La pompe à chaleur comprend un évaporateur, un compresseur, un condenseur et un détendeur. Le fréon suit un cycle fermé, il subit successivement une évaporation complète dans l'évaporateur, une compression adiabatique dans le compresseur, un refroidissement suivi d'une condensation complète dans le condenseur, et, une détente adiabatique et isenthalpique dans le détendeur.

T_1 est la température du fréon dans l'évaporateur, p_1 est la pression de vapeur saturante correspondant à T_1.
T'_2 est la température du fréon à la sortie du compresseur.
T_2 est la température du fréon à la sortie du condenseur et p_2 est la pression de vapeur saturante correspondant à T_2.

On notera L_T la chaleur de vaporisation de 1 kg de fréon à la température T.

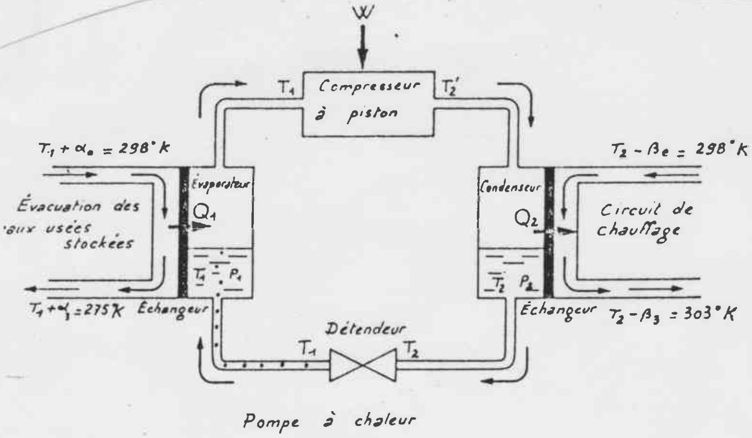


Figure 1

I. *Étude de la détente et de l'évaporation :*

Nous rappelons que, pour un fluide, l'enthalpie est définie par :

$$H = U + pv$$

où U est l'énergie interne, p la pression et v le volume.

a. Nous supposerons que pour la phase liquide :

— v est indépendant de la pression et de la température.

— les produits pv pour les états envisagés sont négligeables ($H \simeq U$).

Calculer la variation d'enthalpie de 1 kg de fréon liquide, lorsque ce liquide passe sans évaporation de l'état (T_2, p_2) à l'état (T_1, p_1). On désignera par C la capacité calorifique de 1 kg de fréon liquide.

b. Calculer la variation d'enthalpie de 1 kg de fréon, lorsque une portion x se vaporise à la température T_1.

c. En déduire la portion x de fréon vaporisé dans le détendeur lors de la transformation isenthalpique entre les états (p_2, T_2) et (p_1, T_1).

d. Quelle est alors la quantité de chaleur Q_1 qui peut être échangée avec les eaux usées au niveau de l'évaporateur pour chaque kilogramme de fréon détendu. (Nous rappelons que le fréon liquide subit à l'intérieur de l'évaporateur une évaporation complète.)

. . . / . . .

II. *Étude de la compression :*

La compression du fréon s'effectue grâce à un compresseur à piston qui fonctionne suivant le principe décrit ci-dessous (voir figure 2, p. 4) :

Un piston se déplace à l'intérieur d'un cylindre muni de deux soupapes S_1 et S_2. Quelle que soit la position du piston, la pression sous le piston est toujours égale à p_2. Le piston effectue les opérations suivantes :

supposées réversibles

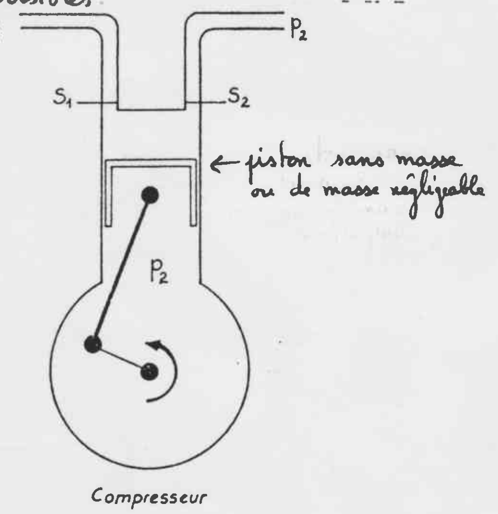


Figure 2

Opération 1 : S_1 ouverte, S_2 fermée; le piston qui est au départ en position haute, descend en aspirant un volume V_1 de gaz à l'état (p_1, T_1).

Opération 2 : S_1 fermée, S_2 fermée; le piston remonte et comprime le gaz de façon adiabatique et réversible jusqu'à ce qu'il atteigne l'état (p_2, T'_2).

On notera V_2 le volume du fréon à la fin de l'opération 2.

Opération 3 : S_1 fermée, S_2 ouverte; le piston continue de remonter et rejette la totalité du gaz à pression constante p_2.

Nous supposerons que le fréon à l'état gazeux a une équation d'état du type gaz parfait :

$$pv = mR'T$$

m est la masse du gaz (en kg); R′ est la constante du gaz relative à 1 kg.

On notera $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ où C_p et C_v sont respectivement les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant de 1 kg de fréon gazeux.

a. Calculer en fonction de γ, p_1, V_1, p_2, V_2, les travaux w_1, w_2 et w_3 fournis par le piston* durant respectivement les opérations 1, 2 et 3.

b. Montrer que le travail W effectué par le compresseur pour chaque kg de fréon débité est égal à :

$$W = \frac{\gamma R'}{\gamma - 1}(T'_2 - T_1) \quad (*)$$

c. Montrer que :

$$T'_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

*càd, par le mécanisme relié au piston (w est parfois appelé travail de l'opérateur)

(*) *Le candidat qui ne peut établir cette relation, l'admettra et continuera le problème.*

III. *Refroidissement et condensation complète dans le condenseur :*

On déterminera, pour un régime stationnaire, la quantité de chaleur Q_2 échangée avec le circuit de chauffage pour chaque kg de gaz débité par le compresseur à p_2 constante.

IV. *Application numérique :*

Déterminer les quantités : Q_1, T'_2, W, et Q_2 pour :

$T_1 = 273$ °K $\quad T_2 = 305$ °K

$p_1 = 5 \times 10^5$ pascals $\quad p_2 = 12{,}65 \times 10^5$ pascals;

C $= 1{,}317$ kJ/kg °K (liquide).

$L_{0\,°C} = 206{,}5$ kJ/kg.

$L_{32\,°C} = 174{,}6$ kJ/kg.

$C_p = 0{,}648$ kJ/kg °K.

$\gamma = 1{,}174$.

R′ $= 95{,}97 \cdot 10^{-3}$ kJ/kg °K.

CCP n 1976

I a) liq. $(T_2\ p_2) \longrightarrow (T_1\ p_1)$ liq. $\quad \Delta H = \Delta(U + pV) \simeq \Delta U = W + Q \simeq Q = mc\,\Delta$

$V_{liq} \simeq ct \Longrightarrow W = 0$

$$\boxed{\Delta H = c(T_1 - T_2)}$$

b) $\boxed{\Delta H = x L_{T_1}}$

c) Tout liq à $T_2\ p_2$ $\xrightarrow{\text{Détendeur}}$ x vap à $T_1\ p_1$, $(1-x)$ liq $T_1\ p_1$

$\searrow$ Tout liq à $T_1\ p_1$ $\nearrow$

$\Delta H_{\text{détendeur}} = c(T_1 - T_2) + x L_{T_1}$

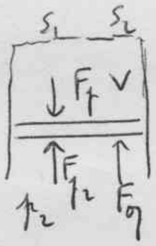
$0 =$

$$\boxed{x = \frac{c\,(T_2 - T_1)}{L_{T_1}}}$$

d) x vap à $T_1 p_1$, $(1-x)$ liq à $T_1 p_1$ $\xrightarrow{\text{Evaporateur}}$ Tout vap à $T_1\ p_1$

$$\boxed{Q_1 = (1-x)\,L_{T_1} = L_{T_1} + c(T_1 - T_2)}$$

II a)



th E_c au piston : $\quad dE_{c_{\text{piston}}} = \delta W_{F_f} + \delta W_{F_{p_2}} + \delta W_{F_q} \qquad (W_q = W_{\text{piston}})$

$$0 = \int p\,dV - \int p_2\,dV + W_q$$

$$W_q = p_2 \oint dV - \oint p\,dV$$

1ère étape : $0 \longrightarrow V_1$, $p = p_1$

$$\boxed{w_1 = p_2 V_1 - \int_0^{V_1} p_1\,dV = p_2 V_1 - p_1 V_1}$$

2e étape : $p_1\ V_1 \longrightarrow V_2\ p_2$, $T_1 \longrightarrow T'_2$

$$w_2 = p_2(V_2 - V_1) - \int_i^f p\,dV$$

$= p_2(V_2 - V_1) + w_{ext}$ où $w_{ext} + q_{adiab} = \Delta U$ du gaz enfermé

$= m c'_v (T'_2 - T_1)$

$= m c'_v \left(\frac{p_2 V_2}{mR'} - \frac{p_1 V_1}{mR'}\right)$

$$w_2 = (p_2 V_2 - p_2 V_1) + \frac{c'_v}{R'}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

or $c'_{v\ \text{massique}} = \frac{c_{v\ \text{molaire}}}{M}$ et $R' = \frac{R}{M}$ (car $nR = mR'$ donc $R' = \frac{R}{\frac{m}{n}} = \frac{R}{M}$) donc $\frac{c'_v}{R'} = \frac{c_v}{R} =$

donc $\boxed{w_2 = p_2(V_2 - V_1) + \frac{1}{\gamma - 1}(p_2 V_2 - p_1 V_1)}$

3e étape : $V_2 \longrightarrow 0$, $p = p_2$

$$\boxed{w_3 = p_2 \int_{V_2}^0 dV - \int_{V_2}^0 p_2\,dV = 0}$$

b) $w = w_1 + w_2 + w_3 = \cancel{p_2 V_1} - p_1 V_1 + p_2(V_2 - \cancel{V_1}) + \frac{1}{\gamma-1}(p_2 V_2 - p_1 V_1) + 0 = (p_2 V_2 - p_1 V_1)(1 +$

$$\boxed{w = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{m\gamma R'}{\gamma - 1}(T'_2 - T_1)}$$

c) L'étape 2 est adiab. rév. d'un G.P. donc $p_1^{1-\gamma}\, T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma}\, T_2'^{\gamma} \longrightarrow \boxed{T'_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$

III Gaz à $p_2\ T'_2$ $\xrightarrow{\text{condenseur}}$ Tout liq à $(T_2\ p_2)$ $\quad$ à p_2 cte $\Delta H = Q$

H fn d'état $\Delta H = \Delta H_1 +$

soit $\boxed{Q_2 = c'_p(T_2 - T'_2) - L_{T_2}}$ représente la chaleur échangée par le fluide dans le conden

IV AN $\quad \underline{Q_1} = c(T_1 - T_2) + L_{T_1} = 1,317\,(273 - 305) + 206,5 = \underline{164,4\ \text{kJ/kg}}$

$\underline{T'_2} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 273 \left(\frac{12,65.10^5}{5.10^5}\right)^{\frac{0,174}{1,174}} = \underline{313\ \text{K}}$

$\underline{w} = \frac{\gamma}{\gamma-1} R'(T'_2 - T_1) = \frac{1,174}{0,174} \times 22,96.10^{-3}\,(313 - 273) = \underline{26,1\ \text{kJ/kg}}$

$\underline{Q_2} = c'_p(T_2 - T'_2) - L_{T_2} = 0,648\,(305 - 313) - 174,6 = \underline{-179,5\ \text{kJ/}}$

Précisons que (avec les conventions de signe choisies) le fluide a cédé la qua de chaleur 179,5 kJ/kg dans le condenseur