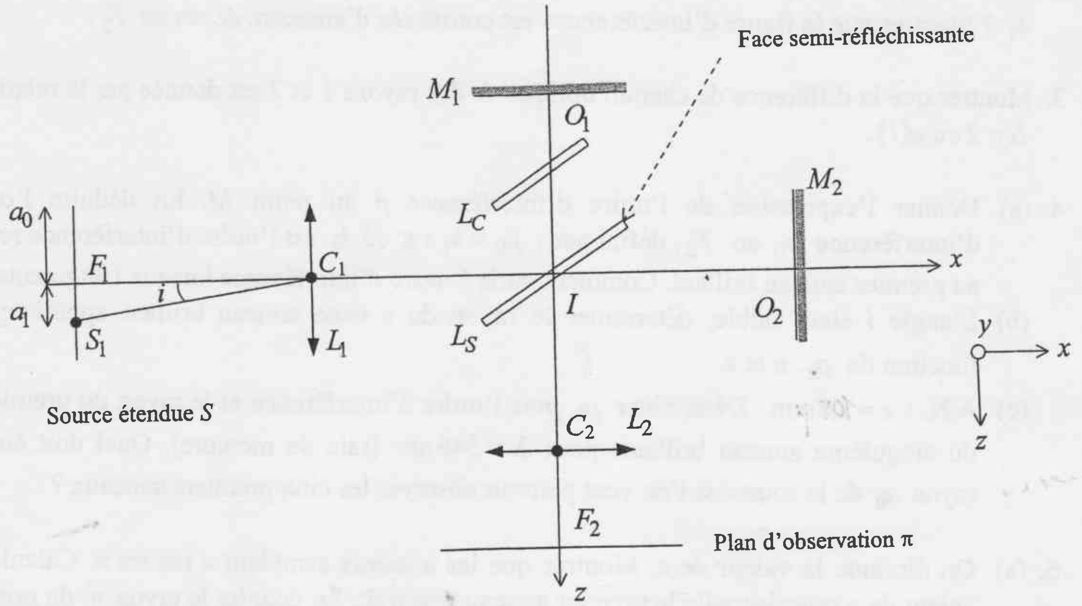
Description de l'interféromètre

On considère l'interféromètre de Michelson ci-dessous où les deux miroirs plans M_1 de centre O_1 et M_2, de centre O_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre.



L'interféromètre comporte une lame L_S, de centre I, semi-réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice, dont le facteur de réflexion énergétique R vaut $R = 0{,}5$. Cette lame est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2.

L_c désigne une lame compensatrice de même épaisseur que L_S, parallèle à L_S et on fera les deux hypothèses suivantes :

i. on considère que cet ensemble est équivalent à une lame séparatrice infiniment mince,

ii. on néglige le déphasage, induit par le traitement réfléchissant de L_S, entre l'onde 1 se réfléchissant sur M_1 et l'onde 2 se réfléchissant sur M_2.

L'interféromètre est placé dans l'air assimilé au vide.

I – Etude des anneaux d'égale inclinaison

On considère que M_1 est fixe et que M_2 peut être translaté suivant l'axe x, parallèlement à l'axe z. La source étendue S, monochromatique, de longueur d'onde λ dans le vide, est placée au foyer objet principal F_1 d'une lentille L_1 (voir figure), de distance focale image $f_1 = 100\text{mm}$. Cette source est assimilable à un cercle centré en F_1 de rayon a_0 dans un plan parallèle à yz.

Le plan d'observation π, parallèle au plan xy, se situe dans le plan focal d'une lentille L_2 de foyer principal image F_2, de distance focale image $f_2 = 1\,\text{m}$. On note $e = IO_1 - IO_2$ où IO_1 représente la distance de I à O_1 et IO_2, la distance de I à O_2.

1. On considère un point S_1, situé à la distance a_1 de F_1 et repéré par l'angle i considéré petit (voir figure).
   (a) Quelle est la direction du faisceau issu de S_1, après avoir traversé la lentille L_1 ?
   (b) Représenter la marche des 2 rayons, issus du rayon S_1C_1, jusque dans le plan π.
   Remarque : on notera « rayon1 », le rayon se réfléchissant sur M_1 et « rayon2 », le rayon se réfléchissant sur M_2.
   (c) Montrer que tout se passe comme si le rayon 2 à la sortie de la séparatrice avait été réfléchi par un miroir virtuel M_2' dont on indiquera la position sur un schéma.

2. Montrer alors que les rayons 1 et 2 interfèrent en un point M du plan focal de L_2. Donner la distance F_2M. Que peut-on dire des autres rayons qui constituent le faisceau issu du point S_1 ? Montrer que la figure d'interférences est constituée d'anneaux de centre F_2.

3. Montrer que la différence de chemin optique Δ des rayons 1 et 2 est donnée par la relation : $\Delta = 2e\cos(i)$.

4. (a) Donner l'expression de l'ordre d'interférence p au point M. En déduire l'ordre d'interférence p_0 en F_2, défini par : $p_0 = k_1 + \varepsilon$ où k_1 est l'ordre d'interférence relatif au premier anneau brillant. Comment varie l'ordre d'interférence lorsque i augmente ?
   (b) L'angle i étant faible, déterminer le rayon du n-ième anneau brillant appelé r_n en fonction de p_0, n et ε.
   (c) A.N. : $e = 108\ \mu m$. Déterminer p_0 puis l'ordre d'interférence et le rayon du premier et du cinquième anneau brillants pour $\lambda = 546\,nm$ (raie de mercure). Quel doit être le rayon a_0 de la source si l'on veut pouvoir observer les cinq premiers anneaux ?

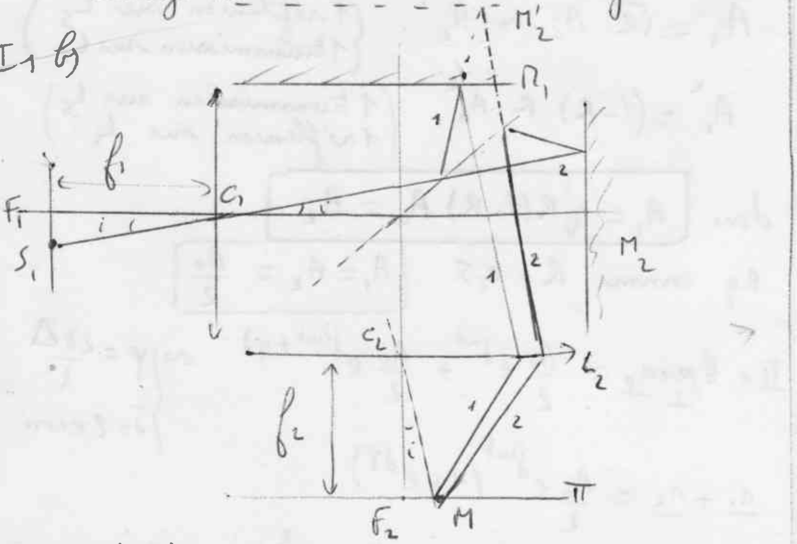
5. (a) On diminue la valeur de e. Montrer que les anneaux semblent « rentrer ». Calculer la valeur de e pour laquelle le premier anneau disparaît. En déduire le rayon r_1' du premier nouvel anneau et le comparer au rayon de l'anneau qui a disparu.
   (b) Décrire le phénomène observé pour $e = 0$.

II

1. (a) Calculer les amplitudes A_1 et A_2 des ondes associées aux rayons 1 et 2 en fonction du coefficient de réflexion R de la séparatrice et de A_0, amplitude de l'onde incidente sur la séparatrice.
   (b) Donner l'expression de l'éclairement $E(M)$ au point M du plan π en fonction de e, i et de l'éclairement $E_0(M)$ lorsque le miroir M_2 est occulté.

I 1 a) Un rayon passant par le centre d'une lentille n'est pas dévié. Le faisceau issu de S_1 émerge de la lentille L_1 avec l'angle i

I 1 b)



I 1 c) $M_1 M'_2 = e$

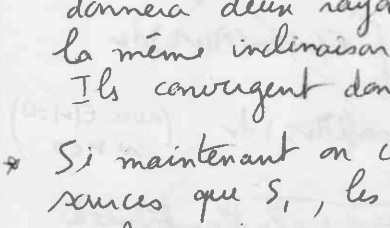
I 2) * Par symétrie 1 et 2 sont réfléchis dans des directions symétriques / S_p, selon l'angle i. S_p permet au rayon 2 une nouvelle réflexion qui le met parallèle à 1

1 et 2 arrivent donc // entre eux, sous l'angle i sur la lentille L_2.

Prenons un rayon // passant par le centre de L_2 celui n'est pas dévié et frappe l'écran en M. Comme des rayons incidents // entre eux convergent dans le plan focal image Π, 1 et 2 convergent en M. Comme ils sont issus du même train d'ondes, ils interfèrent.

$$\left.\begin{aligned} \tan i &= \frac{F_2 M}{f_2} \\ \tan i &= \frac{F_1 S_1}{f_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F_2 M = F_1 S_1 \frac{f_2}{f_1}}$$

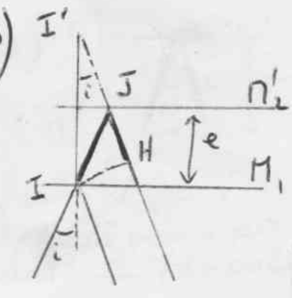
*



S_1 étant dans le plan focal objet de L_1, tout rayon issu de S_1 ressort avec l'angle i. Son cheminement après réflexion sur M_1 et M_2 donnera deux rayons parallèles ayant la même inclinaison i par rapport à l'axe C_2F_2. Ils convergent donc toujours en M.

* Si maintenant on considère d'autres points sources que S_1, les angles i varient. A chaque i correspond une différence de marche donc un état d'interférence. Comme la source est de symétrie de révolution autour de F_1C_1, la figure d'interférence présente aussi une symétrie de révolution autour de $C_2F_2 \Rightarrow$ anneaux

3)



$\delta = IJH = I'JH$

avec $II' = 2e$

$\delta = I'H$

Triangle $II'H$: $I'H = 2e\cos i$

$$\boxed{\delta = 2e\cos i}$$

4.a) Par définition $\boxed{p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2e\cos i}{\lambda}}$

en F_2 : $\boxed{p_0 = \frac{2e}{\lambda}}$ car $i = 0$

* quand $i \nearrow$ $\cos i \searrow$ $p \searrow$ $\quad \boxed{p = p_0 \cos i}$

4) b) $r_n = f_2 \tan i$

si $p_0 = k_1 + \varepsilon$ $k_1 \in \mathbb{N}$ alors le 1er anneau brillant a l'ordre k_1

$$\tan i = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 i} - 1} = \sqrt{\left(\frac{p_0}{p}\right)^2 - 1}$$

Le n^ième anneau brillant a l'ordre $k_1 - (n-1) = p$

k_1 se déduit de $p_0 = \frac{2e}{\lambda} = k_1 + \varepsilon$

c.à.d $\boxed{k_1 = \frac{2e}{\lambda} - \varepsilon}$ $\quad \boxed{r_n = f_2 \sqrt{\left(\frac{p_0}{p}\right)^2 - 1}}$

$$\text{d'où } r_n = f_2 \sqrt{\left(\frac{\frac{2e}{\lambda}}{\frac{2e}{\lambda} - \varepsilon - (n-1)}\right)^2 - 1}$$

$$\text{ou } \boxed{r_n = f_2 \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_0 - \varepsilon - n + 1}\right)^2 - 1}}$$ sans approximation

Avec $e \gg \lambda$ on a $p_0 = \frac{2e}{\lambda} \gg 1$

Alors $\frac{p}{p_0} \sim 1$ c.à.d $\cos i \sim 1$ $i \ll 1$

Ainsi $p = p_0 \cos i = p_0\left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$ et $\tan i \simeq i = \frac{r_n}{f_2}$

d'où $p = p_0\left(1 - \frac{r_n^2}{2 f_2^2}\right)$

Or $p = k_1 - (n-1) = \frac{2e}{\lambda} - \varepsilon - n + 1 = p_0 - \varepsilon - n + 1$

d'où $\boxed{r_n = f_2 \sqrt{\frac{2}{p_0}(n + \varepsilon - 1)}}$

4c) AN $p_0 = \frac{2e}{\lambda} = \frac{2 \times 0{,}108}{0{,}546 \cdot 10^{-3}} = \underline{395{,}6}$

L'ordre du 1er anneau brillant est donc 395

$r_1 = 1 \sqrt{\left(\frac{395{,}6}{395}\right)^2 - 1} = \underline{5{,}5 \text{ cm}}$

Le 5e anneau brillant a l'ordre 391

donc $r_5 = 1\sqrt{\left(\frac{395,6}{391}\right)^2-1} = \underline{15,4 \text{ mm}}$

Ce rayon correspond à $\begin{cases} i_5 = \arctan \frac{r_5}{f_2} \\ i_5 = \arctan \frac{a_0}{f_1} \end{cases}$

$\frac{r_5}{f_2} = \frac{a_0}{f_1}$

soit $\boxed{a_0 = r_5 \frac{f_1}{f_2}} = 15,4 . \frac{0,1}{1} = \underline{1,54 \text{ cm}}$

Le rayon de la source doit être de 1,54 cm pour pouvoir observer 5 anneaux.

I 5 a) $\left.\begin{array}{l} \delta = 2e\cos i \\ \delta = p\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{p\lambda = 2e\cos i}$

Choisissons un anneau, càd p donné alors $e\cos i$ reste constant si on suit cet anneau. Ainsi si e ↘ cos i ↗ i ↘ les anneaux semblent "rentrer"

Pour que l'anneau (le 1er) d'ordre 395 disparaisse il faut qu'il arrive au centre il faut donc que $p_{centre} = 395 = \frac{2e}{\lambda}$

soit $e = \frac{\lambda . 395}{2} = \frac{0,546 . 395 . 10^{-3}}{2}$

$\underline{e = 107,8 \, \mu m}$

Alors $r'_1 = f_2\sqrt{\left(\frac{p_{centre}}{p}\right)^2 - 1} = 1\sqrt{\left(\frac{395}{394}\right)^2 - 1}$

$\underline{r'_1 = 7,1 \text{ cm}}$

(Le rayon du 1er anneau avant de disparaître était 5,5 cm).

I 5. b) $e = 0$ correspond au contact optique on a $p = 0$ partout, c'est la <u>teinte plate</u>.

II 1. a) ⚠ R coefficient de réflexion en énergie donc comme l'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude : ②

$A_1^2 = R . (1-R) A_0^2$ (1 réflexion sur L_s, 1 transmission sur L_s)

$A_2^2 = (1-R) R A_0^2$ (1 transmission sur L_s, 1 réflexion sur L_s)

donc $\boxed{A_1 = \sqrt{R(1-R)} A_0 = A_2}$

Rq comme $R = 0,5$ $\boxed{A_1 = A_2 = \frac{A_0}{2}}$

II 1. b) $\underline{a_1} + \underline{a_2} = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} + \frac{A_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$ où $\begin{cases} \varphi = \frac{2\pi \Delta}{\lambda} \\ \delta = 2e\cos i \end{cases}$

$\underline{a_1} + \underline{a_2} = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t}(1 + e^{j\varphi})$

$E(M) = (\underline{a_1} + \underline{a_2})(\underline{a_1} + \underline{a_2})^* = \frac{A_0^2}{2}(1 + \cos\varphi)$

$E_0(M) = \underline{a_1}\,\underline{a_1}^* = \frac{A_0^2}{4}$

$$\boxed{E(M) = 2E_0(1 + \cos\varphi) = 2E_0\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e\cos i}{\lambda}\right)\right)}$$