

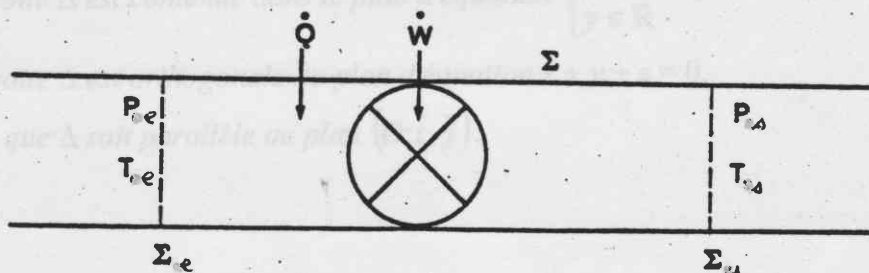
L'air est assimilé dans tout le problème à un gaz parfait diatomique de masse molaire moyenne $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de capacité calorifique molaire à volume constant $c_v = \frac{5}{2} R$, R désignant la constante des gaz parfaits. Son énergie cinétique d'ensemble ainsi que son énergie potentielle dans le champ de pesanteur seront négligées.

On prendra $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et 0°C correspondant à $273,1 \text{ K}$.

La pression d'une atmosphère sera notée atm et l'on prendra $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

PARTIE A

Première partie.

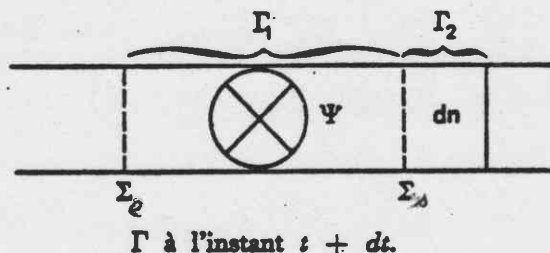
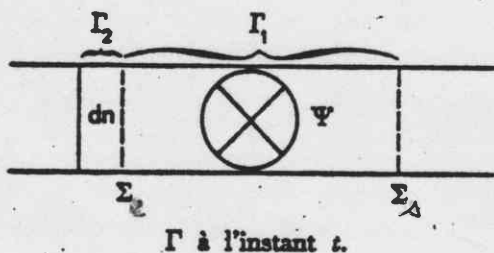


Soit ψ la portion d'espace limitée par une canalisation symbolisée par Σ et par les surfaces planes Σ_e et Σ_s .

L'air entre dans ψ par Σ_e et en ressort par Σ_s ; les pression et température avant Σ_e et après Σ_s sont constantes, uniformes et elles sont notées respectivement $P_e, T_e; P_s, T_s$.

On se place dans le cas d'un régime permanent avec un débit molaire D . Soit dn le nombre de mole d'air qui traverse Σ_e entre les instants t et $t + dt$.

On définit le système Γ formé par la réunion de : Γ_1 : air contenu dans ψ et de Γ_2 : dn mole d'air.



A.I.1. Compte tenu des hypothèses, que peut-on dire de l'énergie interne de Γ_1 au cours du temps ?

A.I.2. On appelle u_e et u_s les énergies internes molaires de l'air au niveau de Σ_e et Σ_s . Exprimer alors la variation d'énergie interne dU de Γ entre les instants t et $t + dt$.

A.I.3. On appelle v_e et v_s les volumes molaires de l'air au niveau de Σ_e et de Σ_s . Exprimer alors le travail des forces de pression au niveau de Σ_e et Σ_s pendant l'intervalle de temps dt .

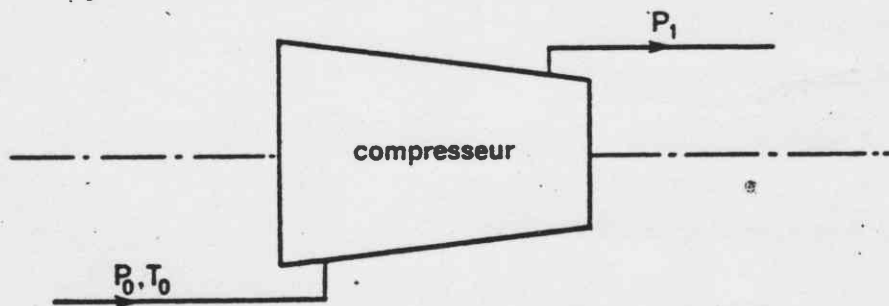
A.I.4. A l'intérieur de ψ , l'air reçoit de la chaleur et du travail : soit $\dot{W}$ et $\dot{Q}$ les puissances mécanique et calorifique correspondantes.

Démontrer que $\dot{W} + \dot{Q} = (h_s - h_e) \cdot D$

h_s et h_e désignant l'enthalpie molaire de l'air à la sortie et à l'entrée de ψ .

Deuxième partie.

Un compresseur amène l'air de l'état $P_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 300 \text{ K}$ à la pression $P_1 = 6 \text{ atm}$. La puissance du moteur entraînant le compresseur est $\mathcal{P} = 1,5 \text{ kW}$. Son fonctionnement est supposé adiabatique.



A.II.1. Dans cette question, on suppose que l'air subit dans le compresseur une transformation isentropique.

- Calculer la température de l'air à la sortie du compresseur, soit T_1 .
- Calculer le débit molaire de l'air D' ainsi que son débit massique D_m en supposant que toute la puissance mécanique $\mathcal{P}$ lui est transférée.

A.II.2. On suppose que l'air a subi dans le compresseur une transformation d'équation $Pv^a = \text{constante}$ entre les états P_0 , T_0 et P_1 , v_1 , correspondant à une adiabatique irréversible.

- On pose $\alpha = \frac{a-1}{a}$. Exprimer α en fonction de T_0 , P_0 , T_1 et P_1 .

Calculer les valeurs numériques de α et a .

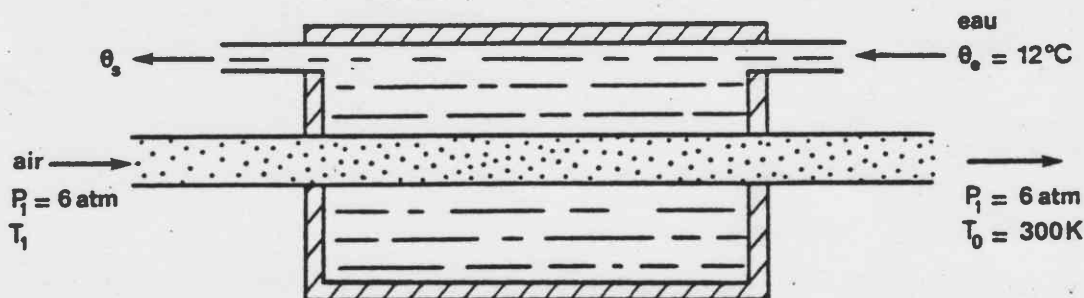
- Donner, dans le cas le plus général, l'expression de la différentielle ds de l'entropie molaire de l'air en fonction de dT et dP .

En déduire ds en fonction de dT .

- Calculer la variation par unité de temps $\dot{S}$ dans le compresseur. Quelle est son origine ? En déduire dans quel intervalle peut varier α et donc a .

Troisième partie.

L'air sortant du compresseur à la pression P_1 et à la température T_1 est refroidi de façon isobare jusqu'à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ dans un échangeur parfaitement calorifugé. Le fluide réfrigérant est constitué par de l'eau qui entre à la température $\theta_0 = 12^\circ \text{C}$ et ressort à la température θ_1 . L'eau est supposée incompressible, de chaleur massique $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



On suppose le régime permanent atteint avec un débit massique $D_m = 6,80 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'air et $d_m = 100 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'eau.

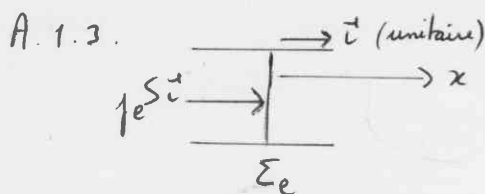
- Calculer θ_1 en $^\circ \text{C}$.

A.1.1. Régime permanent $\Rightarrow \boxed{U_r = \text{cte}}$ (càd $U_r(t+dt) = U_r(t)$)

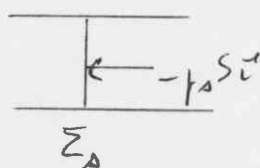
A.1.2. $dU_r = U_r(t+dt) - U_r(t) = U_{r, \text{sortie}}(t+dt) + U_{r, \text{sortie}}(t+dt) - U_{r, \text{entrée}}(t) - U_{r, \text{entrée}}(t)$

Rég. permanent: ds m zone géographique, U ne dépend pas du temps donc on peut supprimer la variable temps pour $U_{r, \text{sortie}}(t+dt)$ et $U_{r, \text{entrée}}(t)$

$\Rightarrow \boxed{dU_r = U_{r, \text{sortie}} - U_{r, \text{entrée}} = (u_s - u_e) dn}$



Soit dx_e le déplacement d'une section pendant dt à l'entrée.
 $\delta W_{F_e} \doteq p_e S i \cdot dx_e i = p_e S dx_e = p_e \delta V_e$
 où δV_e : volume des dn moles à l'entrée



Soit dx_s le déplacement d'une section pendant dt à la sortie
 $\delta W_{F_s} \doteq -p_s S i \cdot dx_s i = -p_s S dx_s = -p_s \delta V_s$
 où δV_s : volume des dn moles à la sortie

$\boxed{\delta W_{F_i} = p_e \delta V_e - p_s \delta V_s = (p_e v_e - p_s v_s) \delta n}$

A.1.4. Système: Γ 1^{er} principe: $d(E_{\text{mano}} + U_r + E_{\text{pot}}) = \delta W_F + \delta W + \delta Q$
 Texte: négliger E_{mano} et E_{pot} de pesanteur $\Rightarrow dU_r = \delta W_F + \delta W + \delta Q$

$\Rightarrow (u_s - u_e) dn + p_s \delta V_s - p_e \delta V_e = \delta W + \delta Q$

on pour les dn moles: $h dn \doteq u dn + p \delta V$

d'où $(h_s - h_e) dn = \delta W + \delta Q$

Divisons par dt et remplaçons $\frac{dn}{dt} \doteq D$

Utilisons la définition d'une puissance $P \doteq \frac{\delta W}{dt}$
 (ici $\dot{W} \doteq \frac{\delta W}{dt}$ et $\dot{Q} \doteq \frac{\delta Q}{dt}$)

$\left. \begin{aligned} &= D(h_s - h_e) = \dot{W} + \dot{Q} \\ &\quad \text{(OK)} \end{aligned} \right\}$

A.II.1. a. Transf. adiab. rév. GP. $\frac{1-\gamma}{1} T_1^\gamma = \frac{1-\gamma}{1} T_0^\gamma \Rightarrow \boxed{T_1' = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$
 AN: $\gamma = \frac{7}{5}$ $T_1' = 500 \text{ K}$

b. $\dot{W} = P$; adiab $\Rightarrow \dot{Q} = 0$; GP $\Rightarrow h_s - h_e = c_p \Delta T$ (1 mole)

Formule du A.1.4. $\Rightarrow \boxed{D' = \frac{P}{c_p(T_1' - T_0)}} = \frac{1500}{\frac{7}{5} \times 8,314 (500 - 300)} = 0,257 \text{ mol.s}^{-1}$

$\underline{D'_m} \doteq \Pi \times D = 29 \times 0,257 = 7,45 \text{ g.s}^{-1}$

A.II.2.a. Si on suppose que la transformation n'est plus réversible, mais suit la loi $p v^a = \text{cte}$ alors $p_1 v_1^a = p_0 v_0^a \Rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{a-1}{a}}$ (2)
Le gaz est toujours parfait: $p v = n R T$

Soit $\alpha = \frac{a-1}{a}$ on obtient

$$\alpha = \frac{\ln \frac{T_1}{T_0}}{\ln \frac{p_1}{p_0}}$$

b. L'entropie molaire suit la loi d'évolution: $ds = \frac{c_p dT - v dp}{T} = \frac{c_p dT}{T} - R \frac{dp}{p}$

$$ds = \frac{\frac{7}{2} R dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

Pour la transformation qui suit $p v^a = \text{cte}$ c-à-d $p^{1-a} T^a = \text{cte}$
par différentiation $(1-a) \frac{dp}{p} + a \frac{dT}{T} = 0$ soit $\frac{dp}{p} = \frac{a}{a-1} \frac{dT}{T} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{T}$

d'où $ds = \left(\frac{7}{2} R - \frac{R}{\alpha} \right) \frac{dT}{T}$

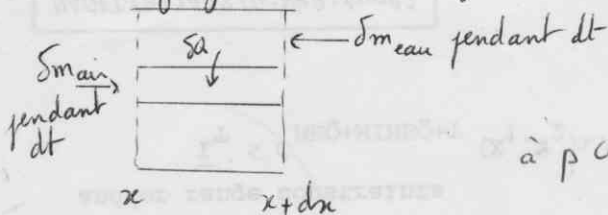
c. Dans le compresseur la variation ΔS_1 d'entropie pour 1 mole est: $\Delta S_1 = \left(\frac{7}{2} R - \frac{R}{\alpha} \right) \ln \frac{T_1}{T_0}$
Pour dn moles circulant pendant dt : $\Delta S = dn \Delta S_1$

$\Delta S = \frac{dS}{dt} = \frac{dn}{dt} \Delta S_1 = D' \left(\frac{7}{2} R - \frac{R}{\alpha} \right) \ln \frac{T_1}{T_0}$

La transformation reste adiabatique donc pas de $\Delta S_{\text{échange}}$, mais est irréversible donc $S_{\text{création}} > 0$ et S consomme de l'entropie créée par unité de temps par irréversibilité

S'est donc positif nécessairement d'où $\frac{7}{2} > \frac{1}{\alpha}$ ou $\alpha > \frac{2}{7}$ ce qui correspond à $a > \frac{7}{5}$

A.III.1. Pour une tranche comprise entre x et $x+dx$ correspondant au passage des fluides pendant dt , la chaleur cédée par le réfrigérant est égale à la chaleur reçue par l'air:



Soit δQ la chaleur reçue par l'air (donc positive)

à p et $dH = \delta Q \Rightarrow \dot{m}_{\text{air}} c'_p \frac{dT}{p} = - \dot{m}_{\text{eau}} c'_{\text{eau}} \frac{d\theta}{p_{\text{eau}}}$

où $dT \equiv T(x+dx) - T(x)$ (dans le sens de l'écoulement de l'air)

$d\theta \equiv \theta(x) - \theta(x+dx)$ (de l'eau)

or $D_m \equiv \frac{\dot{m}_{\text{air}}}{dt}$ et $d_m \equiv \frac{\dot{m}_{\text{eau}}}{dt}$; $c'_p = \frac{c_p}{p}$; $c'_{\text{eau}} = c$ (notation du texte)

d'où $D_m \frac{c_p}{p} dT = - d_m c d\theta$

Intégrons entre l'entrée et la sortie dans le sens d'écoulement de chaque fluide:

$D_m \frac{c_p}{p} (T_0 - T_1) = - d_m c (\theta_s - \theta_e)$

$$\theta_s = \theta_e - \frac{D_m}{d_m} \frac{c_p}{p c} (T_0 - T_1) = (273 + 12) + \frac{6,8}{100} \times \frac{2 \times 8,314}{4,18 \times 10^3 \times 0,029} \times \frac{1}{1} \times (300 - 300)$$

$$= 288 \text{ K} = 15^\circ \text{C}$$