Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.
Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras.

On donne les constantes physiques suivantes .

Charge élémentaire	$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m_e = 0{,}91 \times 10^{-30}$ kg
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 2{,}997\,792\,458 \times 10^{8}$ ms^{-1} $\square$ 3×10^{8} ms^{-1}
Perméabilité du vide	$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ SI
Permittivité du vide	$\varepsilon_o = 1 / (\mu_o c^2)$
Constante de Planck	$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J.s

A. CONDUCTIVITÉ DANS UN SEMI-CONDUCTEUR

On se propose d'étudier les effets d' un champ magnétique uniforme et stationnaire sur les propriétés électromagnétiques d'un matériau semi-conducteur. La première partie (effet de magnétorésistance, effet Hall) est développée dans le cadre des régimes stationnaires. Dans la deuxième partie, on examine, en régime variable, les conditions de propagation d'une onde électromagnétique (onde hélicon).
Le milieu matériel, électriquement neutre, est décrit comme un ensemble d'électrons (charge – e) évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes. Les interactions de ces électrons "de conduction" avec le milieu sont entièrement prises en compte en leur affectant une masse effective m (différente de celle m_e d'un électron dans le vide) et en introduisant une force de "frottement" d'expression $- \alpha \mathbf{v}$, où α est un coefficient positif, caractéristique du milieu : la vitesse **v** décrit la dérive moyenne de l'ensemble des électrons par rapport au réseau sous l'action d'un champ électromagnétique (**E**,**B**).

PREMIERE PARTIE

On considère un échantillon parallélépipédique dont le volume est délimité par les plans
$x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = \ell$, $z = -a / 2$ et $z = a / 2$ (Figure 1).

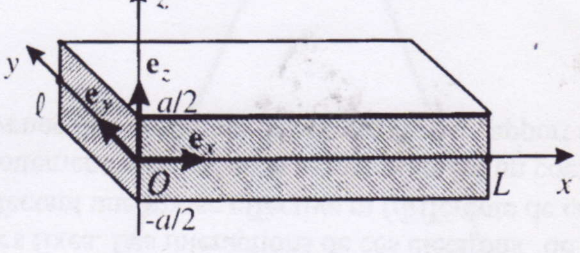


Figure 1

1. a) Dans ce matériau, on applique un champ électrique **E** stationnaire. Ecrire l'équation du mouvement d'un électron animé d'une vitesse **v**. A un instant pris comme origine, ce champ est brusquement annulé, Déduire l'évolution ultérieure de la vitesse de l'électron et donner une signification physique au coefficient $\tau = m / \alpha$.

b) En régime stationnaire, montrer qu'en présence d'un champ électrique **E**, le courant volumique **J** vérifie bien la loi d' Ohm. En déduire la conductivité électronique γ en fonction de e, τ, m et de la densité volumique n des électrons de conduction.

c) Dans un matériau semi-conducteur, tel que l'arséniure de gallium GaAs dopé au silicium, la conduction est assurée par des électrons dont la masse effective m est $0{,}06\ m_e$. Sachant qu'à très basse température la valeur de la conductivité vaut $\gamma = 100$ S. m^{-1} , calculer τ pour $n = 10^{24}$ m^{-3}.

d) Un courant de densité volumique stationnaire circule parallèlement à l' axe Ox : $\mathbf{J} = J\,\mathbf{e}_x$
L'épaisseur a étant faible devant les dimensions latérales L et ℓ, l'échantillon est assimilé à une nappe de courant uniforme d'extension latérale infinie et d'épaisseur a. A l'aide des symétries d'une telle distribution, préciser

l'orientation du champ magnétique **b** qu'elle crée en tout point de l'espace. Justifier le fait que ce champ est nul dans le plan z= 0 . A partir de la forme locale du théorème d' Ampère, calculer **b**. Trouver sa valeur maximale pour a= 10 μm et J = 10^6 A.m^{-2} .

2. a) L'échantillon est désormais plongé dans un champ magnétique extérieur **B**, uniforme et stationnaire, dirigé selon Oz. **B** = B **e$_z$** . Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse **v** d'un électron du matériau soumis à la force de frottement et à ce champ magnétique. (On néglige le poids des électrons).
Montrer que, lorsque τ tend vers l' infini. le vecteur **v** est un vecteur tournant dont on précisera le vecteur rotation. Calculer la norme ω_c de ce dernier, appelée pulsation cyclotron, pour B = 1 T et m = 0,06 m_e.

b) On prend en compte les effets d'un champ électrique **E**, parallèle au plan Oxy, et du champ **B** appliqué précédent. On néglige le champ magnétique créé par le milieu. Les effets d'amortissement sont toujours décrits par la force de frottement - α **v** . Etablir, en régime stationnaire, les relations liant les composantes J_x et J_y du courant volumique aux composantes E_x et E_y du champ électrique. Montrer qu'elles peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante .

$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$ dans laquelle : $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 1/\gamma$ et $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = B/(ne)$

c) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Oy a « L « ℓ (Figure 2.a). On applique une différence de potentiel V entre les plans x = 0 et x = L métallisés. Le champ électrique **E** est supposé uniforme : E = E **e$_x$**. Calculer la résistance d' un tel échantillon. Quelle est la modification relative induite par le champ magnétique (effet de magnétorésistance) ? Calculer cette modification pour
B = 1 T, γ = 100 S.m^{-1} , n = 10^{24} m^{-3} et m = 0,06 m_e.

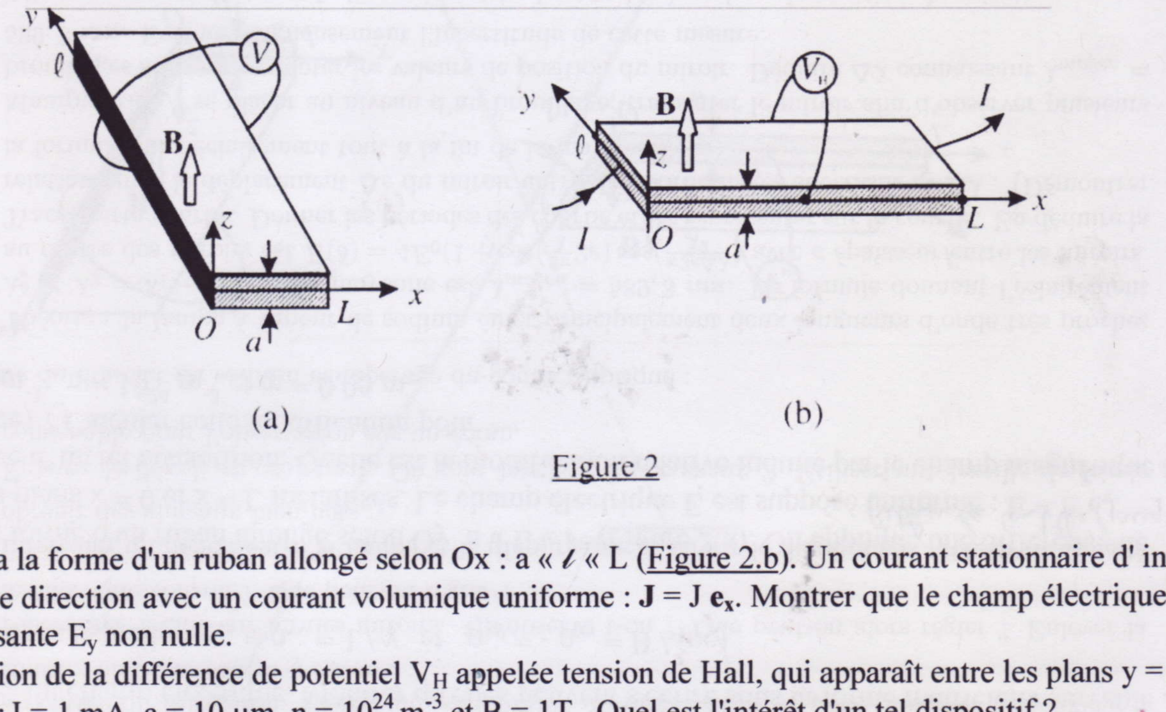


Figure 2

d) L'échantillon a la forme d'un ruban allongé selon Ox : a « ℓ « L (Figure 2.b). Un courant stationnaire d' intensité I circule selon cette direction avec un courant volumique uniforme : **J** = J **e$_x$**. Montrer que le champ électrique possède alors une composante E_y non nulle.
Donner l'expression de la différence de potentiel V_H appelée tension de Hall, qui apparaît entre les plans y = 0 et y = ℓ. Calculer V_H pour I = 1 mA, a = 10 μm, n = 10^{24} m^{-3} et B = 1T . Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

1a) $\boxed{m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e\vec{E}}$

$t>0$ on supprime $\vec{E}$ alors $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v}$

$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \dfrac{m}{\alpha}}$

τ est la durée caractéristique mis par l'e^- pour être arrêté par la force de frottement.

1b) Régime stationnaire $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = -\dfrac{e\vec{E}}{\alpha}$

$\vec{j} = -ne\vec{v} = \dfrac{ne^2}{\alpha}\vec{E} = \gamma\vec{E}$

$\boxed{\gamma = \dfrac{ne^2}{\alpha} = \dfrac{ne^2\tau}{m}}$

1c) AN $\tau = \dfrac{m\gamma}{ne^2} = \dfrac{0{,}06 \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-30} \times 100}{10^{24} \times 1{,}6^2 \times 10^{-19\times 2}} = \underline{2 \cdot 10^{-16}\,s}$

1d) $\odot\,\vec{J}$ — $\vec{e}_y$, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$

Le plan passant par $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est de symétrie. Comme $\vec{B}$ en un point d'un plan de symétrie lui est perpendiculaire, on en déduit $\underline{\vec{b} \parallel \vec{e}_y}$.

Si le point M appartient au plan $y=0$ alors le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est aussi de symétrie donc $\vec{b} \parallel \vec{e}_z$

$M \times \quad O \quad \odot\vec{J}$, z

En ce point $\vec{b}$ ne peut être à la fois parallèle à $\vec{e}_y$ et à $\vec{e}_z$, il est donc $\underline{\text{nul en } y=0}$

Forme locale th. d'Ampère : $\vec{rot}\,\vec{b} = \mu_0\vec{J}$ pour $y \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$

et $\vec{rot}\,\vec{b} = \vec{0}$ pour $y \notin [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$

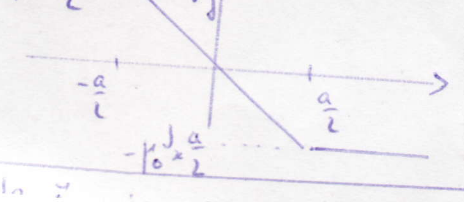
En coord cartésiennes avec b_y comme seule coordonnée : $-\dfrac{\partial b_y}{\partial z} = \mu_0 J_x$ pour $y \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$

soit $b_y = -\mu_0 J_x z$ (avec $b_y = 0$ en $y=0$)

$-\dfrac{\partial b_y}{\partial z} = 0$ pour $y \notin [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ soit $b_y = cte$

Pour une distribution volumique de courants on a continuité de $\vec{b}$ donc $cte = -\mu_0 J_x \frac{a}{2}$ si $y > \frac{a}{2}$ et $cte = \mu_0 J_x \frac{a}{2}$ pour $y < -\frac{a}{2}$

mai



2.a) En fait dans la suite on néglige toujours $\vec{b}$!

TCI à l'e^- : $\boxed{m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v}\wedge\vec{B} - \alpha\vec{v}}$

$\alpha = \dfrac{m}{\tau}$ si $\tau \to \infty$ on néglige la force frott

et $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v}\wedge\vec{B}$ soit $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{e\vec{B}}{m}\wedge\vec{v}}$

ce qui peut s'écrire $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{v}}$

Cette relation signifie que $\vec{v}$ tourne autour de $\vec{\Omega}$ à la vitesse angulaire Ω.

$\boxed{\omega_c = \dfrac{eB}{m} > 0}$ $\quad \vec{B} = B\vec{e}_y$ $\odot$ e^-

AN $\omega_c = \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 1}{0{,}06 \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-30}} = \underline{2{,}9 \cdot 10^{12}\,rad\,s^{-1}}$

2 b) On introduit un champ $\vec{E}$ en plus de $\vec{B}$ avec $\vec{E} \perp \vec{B}$. On ne néglige plus le frott.

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B}$

En régime stationnaire $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

sinon $\vec{J} = -ne\vec{v}$ d'où

$\vec{0} = \dfrac{\alpha}{ne}\vec{J} - e\vec{E} + \dfrac{e}{ne}\vec{J}\wedge\vec{B}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{\gamma}J_x - eE_x + \frac{1}{n}J_yB \\ \frac{e}{\gamma}J_y - eE_y - \frac{1}{n}J_xB \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}}$$ OK avec l'énoncé

2c) Le résultat de cours est $\boxed{R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{L}{a\ell}}$

Démo : $R = \dfrac{U}{I}$ $\quad \xleftarrow{U} \; \xrightarrow{I} \; \rightarrow E$, 0, L, x

$J = \gamma E$

$E = \dfrac{U}{L}$ pour un champ uniforme

$J = \dfrac{I}{S} = \dfrac{I}{a\ell}$

En présence de B, J_x est modifié selon

$$\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} E_x = \frac{1}{\gamma}J_x + \frac{B}{ne}J_y \\ 0 = -\frac{B}{ne}J_x + \frac{J_y}{\gamma} \end{cases}$$

d'où $J_x = E_x \dfrac{1}{\frac{1}{\gamma}\left(1 + \left(\frac{B\gamma}{ne}\right)^2\right)} = \dfrac{\gamma E_x}{1 + \left(\frac{B\gamma}{ne}\right)^2}$

$$\boxed{R_{\text{avec } B} = R_{\text{sans } B}\left(1+\left(\frac{B\gamma}{ne}\right)^2\right)}$$

La modification relative est donc :

$$\left(\frac{B\gamma}{ne}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot 100}{10^{24} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\right)^2 \sim 4 \cdot 10^{-7}$$

Elle est insignifiante.

d) On reprend la forme matricielle avec les conditions $\vec{J} \parallel \vec{e}_x$

alors $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ 0 \end{pmatrix}$

ainsi $\boxed{E_y = -\frac{B}{ne} J_x}$

d'où $V_H = -E_y \times \ell$ avec $V_H \hat{=} V(y=\ell) - V(y=0)$

$$\left.\begin{array}{l} V_H = \frac{BJ\ell}{ne} \\ \text{avec } I = Ja\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_H = \frac{BI}{nea}}$$

AN $V_H = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{10^{24} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 10 \cdot 10^{-6}} = \underline{6{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{V}}$

Résumé

. La conductivité γ d'un milieu conducteur tient compte de la force de frottement fluide subie par les e^- du milieu.

γ est proportionnel à la densité électronique n et inversement proportionnel au coefficient de frottement α.

Si on introduit un temps de relaxation τ, càd la durée caractéristique mis par l'e^- pour être arrêté par la force de frottement alors τ est en $\frac{1}{\alpha}$ et γ est proportionnel à τ

On trouve $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$

o.d.g $\tau \sim 10^{-16}$ s dans un semi-conducteur
$\gamma \sim 100\ \text{S.m}^{-1}$

. Le champ magnétique dû à une nappe ∞ de courant uniforme est lui-même uniforme, parallèle à la nappe et ⊥ courant dans le sens satisfaisant la règle du tire-bouchon

$\longleftarrow \vec{B}$

$\vec{j}$ ⊙

$\longrightarrow \vec{B}$

(2)

. Un e^- soumis à $\vec{B}$ sans force de frottement tourne autour de $\vec{B}$ à la pulsation $\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{m}$

$\vec{B}$ ⊙ e^-

o.d.g si $B = 1$ T alors $\omega \sim 10^{12}\ \text{s}^{-1}$

. La résistance électrique d'un barreau soumis à ddp est

$$R = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\text{longueur sur laquelle s'applique la ddp}}{\text{section traversée par le courant}}$$

En présence de $\vec{B}$ en plus, perpendiculaire à $\vec{E}$, la résistance s'accroît de par la présence d'un courant supplémentaire dans la direction ⊥ à $(\vec{E}, \vec{B})$ mais l'effet de magnétorésistance est très faible.

. Quand un courant stationnaire parcourt une plaque placée dans $\vec{B} \perp \vec{E}$, courant uniquement dans le sens de $\vec{E}$ imposé, alors il apparaît un autre champ dans la direction perpendiculaire à $(\vec{E}\ \vec{B})$ conduisant à une tension appelée tension de Hall. C'est une méthode de mesure de B en TP avec la sonde à effet Hall.