

SISMOMETRIE

Le but de ce problème est de présenter le principe de fonctionnement des sismomètres qui sont utilisés pour mesurer et enregistrer les déplacements du sol causés par les tremblements de terre. A partir des enregistrements réalisés (voir un exemple Figure 1), l'appareil est alors plutôt appelé un sismographe, il est possible de déterminer la localisation ou épicentre des séismes ainsi que leur "magnitude" ; à partir de ces informations les géophysiciens peuvent conduire des études géologiques à grande échelle comme l'étude du mécanisme même des séismes ou la caractérisation de la structure la croûte terrestre. A côté de l'étude des séismes "naturels" il existe aussi des micro-tremblements de terre artificiels provoqués par des explosions et enregistrés eux aussi, par des sismographes ; cela permet une étude géologique plus locale voire de la prospection minière ou pétrolière.

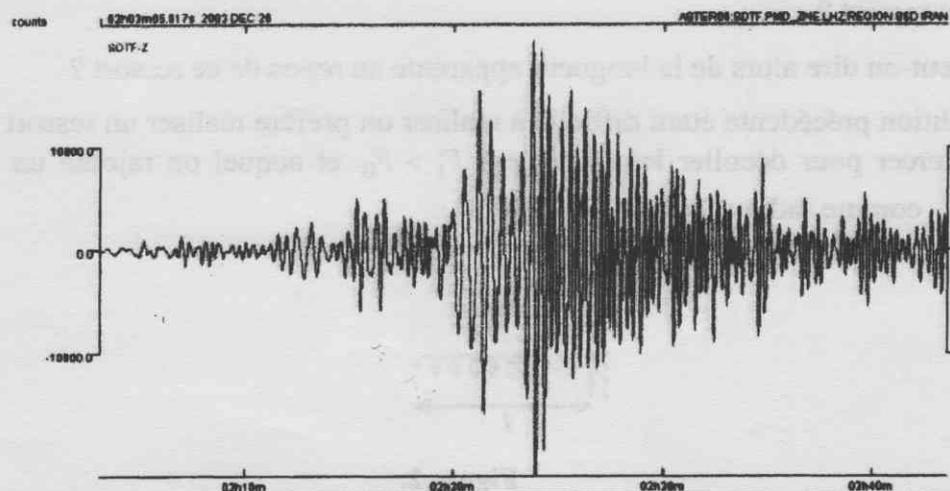


Figure 1. Enregistrement effectué dans les Alpes-Maritimes du séisme du 26 décembre 2003 en Iran.

1^{ère} Partie - Principe de fonctionnement d'un sismomètre

(40 % du barème de ce problème)

I. Principe de la dynamique

1. Donner l'expression du principe fondamental de la dynamique pour un point matériel dans un référentiel galiléen, noté R .
2. Même question dans le cas d'un référentiel non galiléen, noté R' .
3. Application: déterminer l'angle d'inclinaison, supposé constant, d'un pendule simple de masse m et de longueur l , placé dans un véhicule, en translation rectiligne horizontale dans

R galiléen, et dont l'accélération supposée constante est notée \mathbf{a}_v ; on note $g = \|\vec{g}\|$ l'intensité de la pesanteur.

II. Comportement élastique

Soit un ressort de longueur au repos l_0 et de constante de raideur k .

1. Donner l'expression de la force de rappel exercée par le ressort lorsqu'un opérateur lui donne, par traction, une longueur totale l .

2. On suppose maintenant que le ressort soit tel que, par un procédé particulier de fabrication, il faille exercer une force F_0 pour décoller les spires de ce ressort.

2.1 Calculer la force de rappel exercée par le ressort lorsque l'opérateur lui a donné une longueur totale l .

2.2 A quelle condition sur F_0 obtient-on une force de rappel proportionnelle à la longueur totale l du ressort ?

2.3 Que peut-on dire alors de la longueur apparente au repos de ce ressort ?

3. La condition précédente étant difficile à réaliser on préfère réaliser un ressort pour lequel la force à exercer pour décoller les spires est $F_1 > F_0$ et auquel on rajoute un brin de fil de longueur l_1 comme indiqué sur la Figure 2.

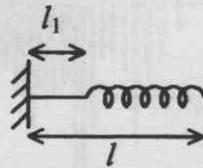


Figure 2.

3.1 Calculer la longueur l_1 à ajouter pour que le ressort exerce une force de rappel proportionnelle à la longueur totale l .

3.2 Conclure sur le rôle du brin de fil de longueur l_1 .

DANS LA SUITE DU PROBLEME on considère que la Terre constitue un référentiel galiléen noté R et que $g = \|\vec{g}\|$ est uniforme. Localement le sol est mis en mouvement par rapport à R sous l'effet des secousses sismiques que l'on souhaite étudier, secousses naturelles, en cas de tremblement de Terre, ou artificielles. On notera R' le référentiel lié au sol, au lieu d'observation. On s'intéresse uniquement dans ce problème au cas où R' est animé par rapport à R d'un mouvement de translation verticale, mais bien sûr l'étude pourrait se généraliser à des mouvements de translation à trois dimensions.

4. Que peut-on dire, dans ce cas, du terme d'accélération de Coriolis (accélération complémentaire) ?

III. Principe de fonctionnement d'un sismomètre pendule

R désigne un référentiel galiléen.

Le sismomètre pendule est constitué d'une masse M reliée à un point A d'un châssis lui-même solidaire du sol en vibration dans R . La liaison de M au bâti est modélisée par un comportement élastique de constante de raideur k associé à un frottement fluide caractérisé par la constante D selon le schéma de la Figure 3. Le point B est également lié au châssis.

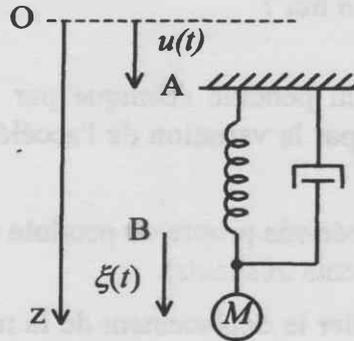


Figure 3. Modèle du sismomètre pendule

1. Qu'appelle-t-on frottement fluide ou visqueux ?

2. On note Oz un axe vertical descendant, O étant fixe dans R . Le mouvement du sol par rapport au référentiel galiléen R est noté $u(t)$ et le mouvement de M par rapport au châssis, donc par rapport au sol, est noté $\xi(t)$. On suppose que ξ est nul à l'équilibre en l'absence de tremblement de terre (donc lorsque u est constamment nul), M est alors en B ; $AB = l_{eq}$

2.1 On pose: $\eta = \frac{D}{2M}$ et $\omega_s^2 = \frac{k}{M}$.

et $\overline{BM} = \xi(t)$

En raisonnant dans le référentiel non-galiléen R' , montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit : $\ddot{\xi} + 2\eta\dot{\xi} + \omega_s^2 \xi = -\ddot{u}$.

2.2 Dans le cas de mouvements très rapides (donc de très grandes fréquences), quel est le terme prépondérant (au premier membre)?

Quelle grandeur représente alors $\xi(t)$?

2.3 Mêmes questions dans le cas de mouvements très lents.

3. Déterminer l'expression complexe de la réponse $\xi(t)$, en régime permanent sinusoïdal - ou harmonique forcé -, du système à un déplacement du sol de type sinusoïdal d'amplitude U_0 . On caractérise le mouvement enregistré par son amplitude $X(\omega)$ et son déphasage $\Phi(\omega)$ et

on introduit le paramètre $h = \frac{\eta}{\omega_s}$.

3.1 Déterminer les expressions de $X(\omega)$ et $\Phi(\omega)$ en fonction de h , U_0 et du rapport $x = \frac{\omega}{\omega_s}$.

3.2 Étudier les comportements limites de $X(\omega)$ et $\Phi(\omega)$ aux très basses, puis aux très hautes pulsations.

3.3 On pose $Y = \frac{U_0^2}{X^2}$. En exprimant Y en fonction de $x' = \frac{1}{x} = \frac{\omega_s}{\omega}$, montrer qu'il ne peut pas y avoir résonance si h est supérieur à une valeur limite que l'on déterminera.

3.4 Tracer les courbes $X(\omega)$ et $\Phi(\omega)$ pour les deux valeurs suivantes du paramètre h :

$h = 2$ puis $h = 0,5$, les valeurs de U_0 et de ω_s étant fixées. On donnera les valeurs de ω et de x à la résonance si elle existe.
Que deviennent ces courbes pour h nul ?

4. On définit la sensibilité σ d'un pendule sismique par la valeur absolue du quotient du déplacement $\Delta\xi$ de la masse M par la variation de l'accélération sismique Δa qui provoque ce déplacement.

4.1 Exprimer σ en fonction de la période propre du pendule dans le cas de mouvements dits de longue période (donc de mouvements très lents).

4.2 Application numérique: calculer le déplacement de la masse M , provoqué sur un pendule de période propre 60 s par une variation d'accélération du bâti de 1 milligal = $10^{-3} \text{ cm.s}^{-2}$.

5. On considère que le sol est soumis à une accélération $a(t)$ dont le graphe est donné Figure 4 ci-dessous.

Indiquer, qualitativement et sans calcul, le type de réponse dans le cas limite où $\varepsilon \rightarrow 0$, sachant que $h < 1$.

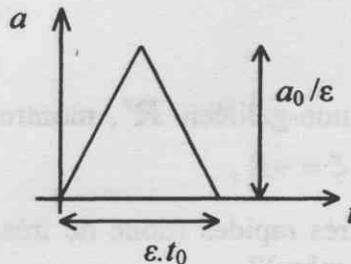


Figure 4. Accélération du sol.

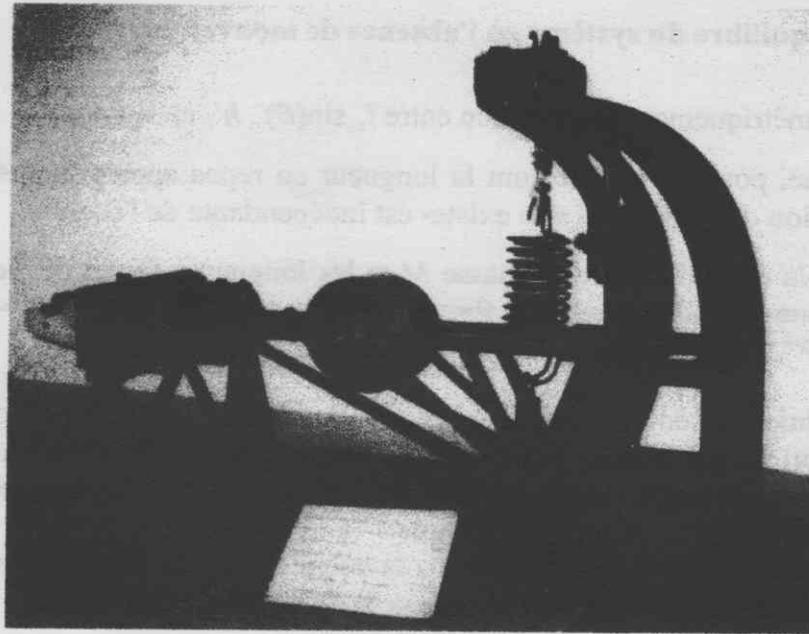


Figure 5. Exemple de sismomètre "vertical", de type GALITZIN (Jena, 1935).

IV - Exemple de sismomètre à longue période

Le sismomètre représenté ci-dessous Figure 6 est aussi appelé "sismomètre de LACOSTE". Il est constitué d'une masse M située à l'extrémité d'une tige de masse négligée. La tige est mobile autour d'un axe horizontal Bx orthogonal au plan de la figure (liaison pivot idéale) ; on note h_1 la distance à l'axe Bx du centre d'inertie G de la masse M . Un ressort de constante de raideur k est tendu entre un point A du bâti situé au-dessus de B, sur la même verticale (on note : $AB = h_2$) et un point C de la tige, tel que $BC = h'_1$.

Les mouvements du point G ont lieu dans le plan vertical.

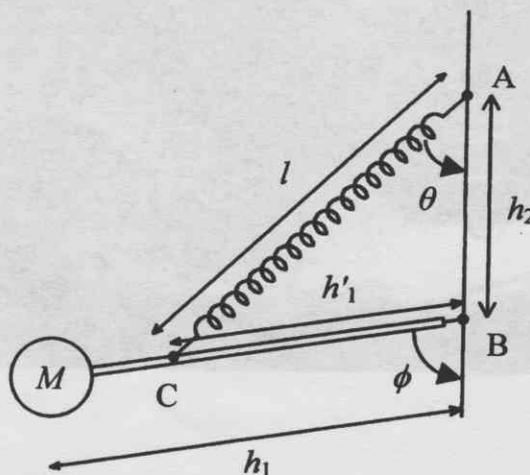


Figure 6. Sismomètre de LACOSTE.

1. Etude de l'équilibre du système en l'absence de mouvement du sol.

1.1 Etablir géométriquement une relation entre l , $\sin(\theta)$, h' et $\sin(\phi)$.

1.2 Montrer que, pour un ressort dont la longueur au repos apparente (définie au 1.1) est nulle, la condition d'équilibre -si elle existe- est indépendante de l'angle ϕ .

Donner la condition liant la masse M et les longueurs fixées par le constructeur pour que cette position d'équilibre existe ?

2. Un tel pendule possède en théorie une période infinie. Dans la pratique, la plus grande période que l'on ait pu obtenir pour ce type de pendule est de 80 s alors que les valeurs usuelles des sismomètres à longue période sont plutôt de 15 à 30 s. Quels facteurs peuvent intervenir limitant ainsi la période du pendule ?

Au vu des résultats de la question III. 4 de la première partie, rappeler le rôle de la période propre dans la sensibilité du pendule sismique en basse fréquence.

I.1. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

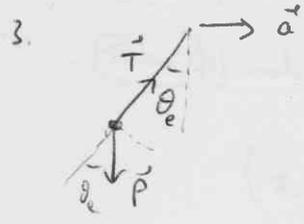
2. $\sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}'$

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$

\vec{a}_e : accélération du point coïncidant

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{K'R} \wedge \vec{r}'$



3. Dans le réf'de la voiture: $\vec{a}' = \vec{0}$

$\rightarrow \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = \vec{0}$

• transf de la voiture $\rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}$ $\vec{a}_e = \vec{a}$ $\left\{ \rightarrow \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a} = \vec{0} \right.$

• Projection sur \perp fil pour éliminer T $\rightarrow mg \sin \theta_e = ma \cos \theta_e$

$\rightarrow \tan \theta_e = \frac{a}{g}$

II.1. $\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{i}$ (\vec{i} dirigé vers l'extérieur)

2.1. L'opérateur doit déjà exercer F_0 pour seulement décoller les spires (cad à l_0)
Il faut donc retrancher cette force F_0 pour obtenir la force de rappel totale

$\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{i} - F_0 \vec{i}$ (quand $l = l_0$, le ressort au repos réagit avec $-F_0 \vec{i}$ pour le décollage des spires)

2.2 \rightarrow Pour obtenir $\vec{F} = -kl \vec{i}$, il faut donc que $kl_0 = F_0$

2.3. Alors la longueur apparente au repos devient nulle

3.1. Nouvelle force de rappel du ressort: $\vec{F}' = (k(l - l_1 - l_0) - F_1) \vec{i}$

• Pour obtenir $\vec{F}' = -kl \vec{i}$ il faut donc que $k(l_1 + l_0) = F_1$

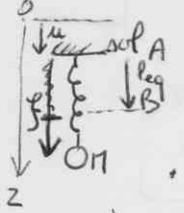
3.2. Role du brin de fil l_1 : obtenir une longueur apparente au repos nulle.

4. Translation $\rightarrow \vec{a}_c = \vec{0}$

III.1. Frottement fluide ou visqueux = force proportionnelle à la vitesse. $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

2.1. Syst {M} Forces d'interaction sur M: $\vec{P} = Mg \vec{e}_y$ $\vec{T} = -k(l_{eq} + \xi) \vec{e}_y$

Force d'inertie d'entraînement: $\vec{f}_{ic} = -M\vec{a}_e$ avec $\vec{a}_e = \ddot{u} \vec{e}_y$



$\rightarrow -M\ddot{u} + Mg - k(l_{eq} + \xi) - M\ddot{u} = M\ddot{\xi}$

• A l'équil. $\xi = u = 0$ $\ddot{u} = \ddot{\xi} = 0 \rightarrow Mg - k(l_{eq} + l_0) = 0$ $\left\{ \begin{aligned} -M\ddot{u} - k(\xi) - M\ddot{u} &= M\ddot{\xi} \end{aligned} \right.$

$\rightarrow \ddot{\xi} + \frac{2}{\tau} \dot{\xi} + \frac{k}{M} \xi = -\ddot{u}$ ou $\ddot{\xi} + 2\gamma \dot{\xi} + \omega_s^2 \xi = -\ddot{u}$

2.2. $\ddot{\xi} = -\omega_s^2 \xi \gg (\xi)$ si $\omega \gg 1$ • Très grandes fréquences $\rightarrow \ddot{\xi}$ prépondérant

$\rightarrow \ddot{\xi} = -\ddot{u} \rightarrow \xi = -u$ ξ représente le mouvement du sol

2.3. • Très basses fréquences $\rightarrow \xi$ prépondérant $\rightarrow \xi = -\frac{\ddot{u}}{\omega_s^2}$

ξ suit ou représente à un facteur près l'inverse de l'accélération du sol

3.1. Rég. permanent $\Rightarrow \ddot{u} \cong U_0 e^{j\omega t}$ et $\ddot{\xi} \cong X e^{j(\omega t + \phi)}$

• équa. diff. $\rightarrow (-\omega^2 + 2j\gamma\omega + \omega_s^2) X e^{j\phi} = +\omega^2 U_0 \rightarrow X = \frac{\omega^2 U_0}{1 - \omega^2 + \omega_s^2 + 2j\gamma\omega}$

$\tan \phi = \frac{-2\gamma\omega}{-\omega^2 + \omega_s^2}$ avec $\phi \in]-\pi; 0[$

Diverses num et dénom par $\omega_s^2 \rightarrow X = \frac{x^2 U_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4h^2 x^2}}$ $\tan \phi = \frac{-2hx}{1-x^2}$ $\phi \in [-\pi; 0]$ (2)

III 3.2. TBF $x \rightarrow 0 \Rightarrow X \sim \frac{x^2 U_0}{1} \rightarrow 0$ et $\tan \phi \sim -2hx \rightarrow 0$ donc $\phi \rightarrow 0$

THF $x \rightarrow \infty \Rightarrow X \sim \frac{x^2 U_0}{x^2} \sim U_0$ et $\tan \phi \sim \frac{-2hx}{-x^2} \sim \frac{2h}{x} \rightarrow 0^+$ donc $\phi \rightarrow -\pi$

(ou bien : TBF : $\omega_s^2 X e^{i\phi} = \omega^2 U_0 \Rightarrow X \rightarrow 0$ et $\phi \rightarrow 0$
 THF : $-\omega^2 X e^{i\phi} = \omega^2 U_0 \Rightarrow X \rightarrow U_0$ et $\phi \rightarrow \pm\pi$ soit $-\pi$)

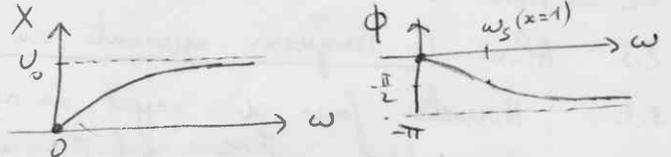
3.3. $Y \equiv \frac{U_0^2}{X^2} = \frac{(1-x^2)^2 + 4h^2 x^2}{x^4} = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \frac{4h^2}{x^2} = (x'^2 - 1)^2 + 4hx'^2$
 $x' \equiv \frac{1}{x}$

Résonance si X passe par un extremum (max), soit Y passe par un extremum (min.)
 Comme x'^2 est une fonction monotone de x (pour $x > 0$), il suffit de voir si $\frac{dY}{dx'^2}$ s'annule.

$\rightarrow \frac{dY}{dx'^2} = 2(x'^2 - 1) + 4h^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 = \frac{2 - 4h^2}{2} = 1 - 2h^2$

Condition nécessaire $x'^2 \geq 0$ soit $1 - 2h^2 \geq 0$ soit $h \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ \Leftrightarrow résonance de X
 $h_{\text{limite}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

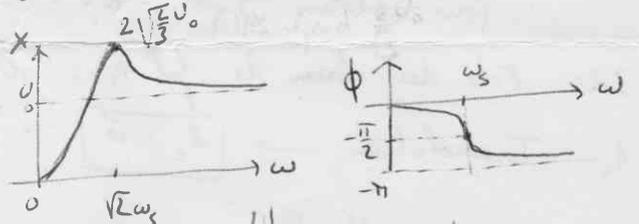
3.4. $h = 2 > h_{\text{limite}}$ donc pas de résonance



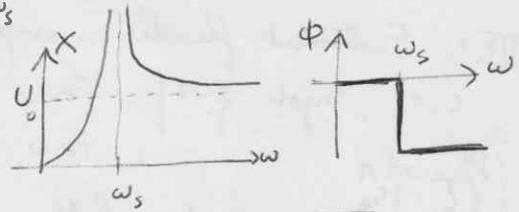
$h = \frac{1}{2} < h_{\text{limite}}$ donc résonance en

$x'^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ soit $x = \sqrt{2}$ ou $\omega = \sqrt{2} \omega_s$

$X(\sqrt{2} \omega_s) = \frac{2U_0}{\sqrt{(1-2)^2 + 2h^2}} = \frac{2U_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}}$



Notes. Pour $h=0$, l'amplitude à la résonance tend vers l'infini et $\omega_{\text{résonance}} \rightarrow \omega_s$ (car $x' = 1$ pour $h=0$)

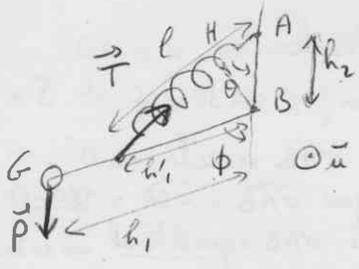


4.1. TBF cf 3.2 $\omega_s^2 X e^{i\phi} = \omega^2 U_0 = -i\ddot{a}$
 $\Delta \xi = X$
 $\Delta a = \ddot{a}$
 $\Rightarrow \omega_s^2 \Delta \xi e^{i\phi} = -\Delta a$ module $\frac{\Delta \xi}{\Delta a} = \frac{1}{\omega_s^2} = \frac{T_s^2}{4\pi^2}$

4.2. A.N : $\Delta \xi = \frac{60^2}{4\pi^2} \times 10^{-3} = \text{estimé à } 0,9 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$

5 Excitation de THF cf 2.2. $\xi = -u$ donc π bouge \checkmark par rapport au sol de manière opposée au moment du séisme, puis nécessairement par rapport à l'équilibre vite rétabli du sol, π va osciller en partant d'une forte amplitude (celle du séisme) puis s'atténuera (car h existe) Comme $h < 1$ on aura des oscillations amorties (limite lorsque $\Delta = 0$ c'ad $\gamma^2 - \omega_s^2 = 0$) ou $h = 1$

IV.1.1.



• simple relation de géométrie

$$l \sin \theta = h_1' \sin \phi$$

1.2. Th. du moment cinétique / B dans R galiléen sur le syst { \Pi + tige (sans masse) }

• Forces : cf schéma : \vec{P} \vec{T} \vec{R}_B réaction en B

• Moments / axe B \vec{u} :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_B(\vec{P}) \cdot \vec{u} &= + m g h_1 \sin \phi \vec{u} \\ \mathcal{M}_B(\vec{T}) \cdot \vec{u} &= - k l \vec{u} \cdot \vec{BH} \quad \text{avec } BH = h_2 \sin \theta \\ \mathcal{M}_B(\vec{R}_B) \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{car liaison parfaite par hyp.} \end{aligned}$$

• Equilibre $\rightarrow \sum \mathcal{M}_B \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \pi g h_1 \sin \phi = k l h_2 \sin \theta$
 $\rightarrow \boxed{\pi g h_1 = k h_1' h_2}$ condition d'équilibre indépendante de ϕ

2 Facteurs limitant la période : les frottements sur l'axe B \vec{u} .

cf III.4. $\sigma = \frac{T_s^2}{4\pi^2}$ $\boxed{\sigma \uparrow \text{ si } T_s \uparrow}$