1 Approche eulérienne

L'observateur est fixe et voit le fluide s'écouler devant lui. Il caractérise donc le fluide par des *champs* qui rendent compte de l'état de la particule de fluide qui passe en un point M à l'instant t :
$p(M,t)$, $\mu(M,t)$, $T(M,t)$ et $\mathbf{v}(M,t)$

Pour calculer l'accélération de la particule de fluide passant en M à l'instant t, l'observateur est néanmoins obligé de la suivre *momentanément* entre les instant t et $t+dt$. Il doit donc utiliser la **dérivée particulaire** :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = lim_{dt\to 0}\frac{\mathbf{v}(M+\mathbf{dM},t+dt)-\mathbf{v}(M,t)}{dt}$$

En déscription eulérienne, on a alors :

$$\mathbf{a}(M,t) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

Mathématiquement, cette dérivée a pour expression :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$$

Le terme $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ est appelé **accélération locale ou temporelle**, il est dû au caractère **non stationnaire** de l'écoulement.

Le terme $(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$ est appelé **accélération convective**, il est dû au caractère **non uniforme** de l'écoulement.

2 Equation de Navier-Stokes

Forces volumiques de pression : $-\mathbf{grad\,p}$ (correspondant aussi à la Poussée d'Archimède)

Forces volumiques de pesanteur : $\mu\mathbf{g}$

Forces volumiques de viscosité : $\eta\,\vec{\Delta}\mathbf{v}$

Forces volumiques d'inertie d'entraînement: $\mu\omega^2\mathbf{r}$ (pour un référentiel en rotation uniforme)

Forces volumiques d'inertie de Coriolis: : $-\mu 2\vec{\omega}\wedge\mathbf{v}$

$$\mu\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\,\mathbf{grad}\,p + \mu\mathbf{g} + \eta\,\vec{\Delta}\mathbf{v} + \mu\omega^2\mathbf{r} - \mu 2\vec{\omega}\wedge\mathbf{v}$$

- les forces d'inertie ne s'appliquent que dans un référentiel **non** galiléen.
- Expression surfacique de la force de viscosité pour un écoulement plan tel que $\mathbf{v} = v(z)\mathbf{u_x}$:
  $\mathbf{F_{z^-\to z^+}} = -\eta\,S\frac{\partial v}{\partial z}$ $\mathbf{F_{z^+\to z^-}} = +\eta\,S\frac{\partial v}{\partial z}$
- Expression sur l'élément $S[z,z+dz]$: $\mathbf{F_{z^-\to z^+}} + \mathbf{F_{(z+dz)^+\to(z+dz)^-}} = -\eta\,S\frac{\partial v}{\partial z}\,(z) + \eta\,S\frac{\partial v}{\partial z}\,(z+dz) = \eta\,S\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}dz$ d'où l' expression volumique : $\eta\,\vec{\Delta}\mathbf{v}$

3 Equation de la statique des fluides

$$\mathbf{0} = -\,\mathbf{grad}\,p + \mu\mathbf{g} + \mu\omega^2\mathbf{r}$$

- le dernier terme représente la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une étude dans un référentiel en rotation uniforme. Il disparaît bien-sûr si le référentiel d'étude est galiléen et on retrouve la loi habituelle de la statique des fluides : $\mathbf{grad}\,p = \mu\mathbf{g}$ dont la projection est $dp = -\mu g dz$ (z ascendant).
- la force de viscosité disparaît en statique, ainsi que les forces de Coriolis.
- attention : si l'étude se fait dans le référentiel terrestre considéré comme non galiléen (par exemple pour l'étude des vents ou des courants marins) la force volumique de pesanteur $\mu\mathbf{g}$ tient compte de la force d'inertie d'entraînement de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.
- valable aussi en dynamique **en projection verticale** pour un écoulement **horizontal**

4 Durées caractéristiques

On définit la durée caractéristique τ par la durée que met la particule fluide à prendre la vitesse v sur une distance caractéristique L. On la trouve en comparant les termes d'une même équation différentielle.

- Pour trouver $\tau_{diffusion}$, on compare ainsi $\mu\frac{\partial v}{\partial t}$ à $\eta\Delta v$: $\mu\frac{\partial v}{\partial t} \simeq \eta\Delta v$ d'où $\tau_{diffusion} = \frac{\mu L^2}{\eta} = \frac{L^2}{\nu}$
- Pour trouver $\tau_{convection}$, on compare ainsi $\mu\frac{\partial v}{\partial t}$ à $\mu(v.grad)v$: $\mu\frac{\partial v}{\partial t} \simeq \mu(v.grad)v$ d'où $\tau_{convection} = \frac{L}{v}$

5 Nombre de Reynolds :

Il est défini pour l'écoulement à la vitesse v d'un fluide de viscosité cinématique ν et pour un obstacle de dimension caractéristique L (rappel $\nu = \eta/\mu$) :

$$\mathcal{R}e = \frac{L\,v}{\nu}$$

Il permet de comparer les effets du transport convectif et du transport diffusif (viscosité) :

$$\mathcal{R}e = \frac{convection}{viscosite} = \frac{\mu(v.grad)v}{\eta\Delta v} = \frac{Lv}{\nu}$$

- si $\mathcal{R}e << 1$, l'écoulement est laminaire (la viscosité l'emporte sur la convection)
- si $\mathcal{R}e > 10^3$, l'écoulement est turbulent (la convection l'emporte sur la viscosité)
- Au lieu de comparer les termes de l'équation de Navier-Stokes, on peut aussi comparer les temps caractéristiques associés sachant qu'ils varient en sens inverse; (plus la vitesse de diffusion est *élevée*, plus la durée caractéristique de diffusion est *courte*): $\mathcal{R}e = \frac{\tau_{diffusion}}{\tau_{convection}} = \frac{L^2/\nu}{L/v} = \frac{Lv}{\nu}$
- Force de trainée :

  Elle est la manifestation macroscopique des forces de viscosité. Sa direction est opposée à celle de l'écoulement. Les expressions suivantes sont celles obtenues pour une sphère plongée dans le fluide :

  - si $\mathcal{R}e << 1$, $|F| = 6\pi\eta r v$

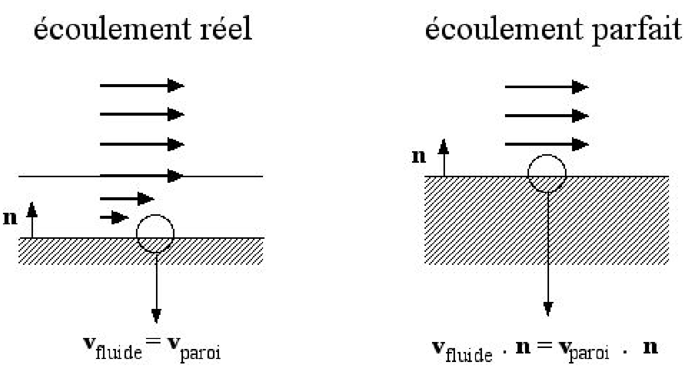
  - si $\mathcal{R}e > 10^3$, $|F| = \mu C\pi r^2 v^2$ $C \simeq 0,1$ *(formule et valeur de C approchées)*

6 Fluide parfait : équation d'Euler- théorème de Bernoulli

Modèle de l'écoulement parfait :

On appelle écoulement parfait, un écoulement dans lequel la viscosité est négligeable.

En pratique il n'existe pas d'écoulement parfait, mais dans la majorité des cas, loin des obstacles la viscosité joue peu et l'écoulement peut-être considéré comme parfait. Les effets de la viscosité sont alors localisés aux voisinage des obstacles dans la *couche limite*. Il suffit donc d'exclure la couche limite de l'écoulement étudié pour qu'il puisse être considéré comme parfait, ce qui restreint la condition limite.



conditions aux limites

Equation d'Euler : c'est l'équation de Navier-Stokes dans laquelle on néglige les forces de viscosité.

$$\mu\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\,\mathbf{grad}\,p + \mu\mathbf{g} + \mu\omega^2\mathbf{r} - \mu 2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

(Les deux derniers termes n'existent que pour une étude dans un référentiel non galiléen).

Théorème de Bernoulli : basé sur les hypothèses d' écoulement **Parfait Stationnaire** et **Incompressible** dans un champ de pesanteur **g uniforme**, dans un référentiel **galiléen**, démontré à partir de l'équation d'Euler:

- $p + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 + \mu g z = Constante$ sur une ligne de courant (z ascendant)
- $p + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 + \mu g z = Constante$ partout dans le fluide avec l'hypothèse **irrotationnel** en plus
- il existe un théorème de Bernoulli dans le cas *non* stationnaire; il faut repartir de l'équation d'Euler et refaire la démonstration avec le terme de dérivée *locale* en plus.

7 Relations de continuité

Sur la vitesse :

- Cas d'un fluide réel (existence de viscosité) : il y a continuité de toutes les composantes de la vitesse. Si la paroi est fixe , la vitesse du fluide au niveau de la paroi est nulle.
- Cas d'un fluide parfait (viscosité négligée) : à cause de la couche limite, ignorée dans ce modèle, mais où se manifeste nécessairement la viscosité (cf figure précédente), on écrit **seulement** la continuité de la composante **normale** de la vitesse.

Sur la dérivée de la vitesse (n'intervient que pour le modèle réel) :

- Attention : il n'y a pas nécessairement continuité de la dérivée de la vitesse à la limite d'une paroi ou de la surface libre du fluide.
  - Au niveau d'une paroi on ne peut rien dire.
  - Au niveau de la surface libre il faut écrire la force de viscosité du fluide **extérieur** sur le fluide étudié. **Si** le fluide extérieur a une viscosité négligeable, alors la dérivée de la vitesse du fluide étudié au niveau de la surface libre peut être considérée comme nulle.

Sur la pression :

- Si la surface de séparation est **plane**, il y a continuité de la pression.
- Si la surface séparation n'est pas plane, il faut tenir compte des forces de tension superficielle et il n'y a pas continuité de la pression. **Si on ne fait pas mention des forces de tension superficielle, il y a continuité de la pression**.

8 Débits

Débit volumique : $D_v(t) = \frac{dV}{dt} = \int_{(S)} \mathbf{v}(M,t).\mathbf{dS}$

Débit massique : $D_m(t) = \frac{dm}{dt} = \int_{(S)} \mu(M,t)\mathbf{v}(M,t).\mathbf{dS}$

9 Équation de conservation de la masse

C'est une équation **locale** ç-à-d valable en tout point M de l'écoulement, à tout instant t. Elle s'établit en faisant un bilan de masse sur un volume **fixe** :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + div\,(\mu \mathbf{v}) = 0$$

Attention : ne pas appliquer cette relation lorsque la section de la canalisation varie si on néglige les composantes **latérales** de la vitesse, ce qui est en général le cas. Il faut alors refaire un bilan entre les sections $[S(x), S(x+dx)]$.

Ecoulement stationnaire Définition: tous les champs sont indépendants du temps

- $D_m = cst$ le long d'un tube de courant
- Quand les lignes de champ s'écartent, $||\mathbf{v}||$ diminue

Ecoulement incompressible Définition: $\mu(M,t) = cst$

- $D_v = cst$ le long d'un tube de courant
- $div\,\mathbf{v} = 0$