

1)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  (on néglige le poids)

$\Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m \dot{v}_x = q B_0 v_y \\ m \dot{v}_y = -q B_0 v_x \\ m \dot{v}_z = 0 \end{cases}$

2) On dérive 1 et on remplace  $\dot{v}_y$  grâce à 2  
 $\rightarrow m \ddot{v}_x = q B_0 (-\frac{q B_0}{m} v_x)$

$\rightarrow \ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$

3) Intégrer :  $v_x = A_1 \cos \omega_c t + A_2 \sin \omega_c t$

Cond. init. :  $A_1 = v_{\perp}$

1  $\rightarrow m \omega_c (-A_1 \sin \omega_c t + A_2 \cos \omega_c t) = q B_0 v_y$

Cond. init. :  $m \omega_c A_2 = q B_0 \times 0 \rightarrow A_2 = 0$

$\Rightarrow v_x = v_{\perp} \cos \omega_c t$

2  $\rightarrow v_y = \frac{m}{q B_0} \dot{v}_x = \frac{m}{q B_0} v_{\perp} (-\omega_c) \sin \omega_c t$

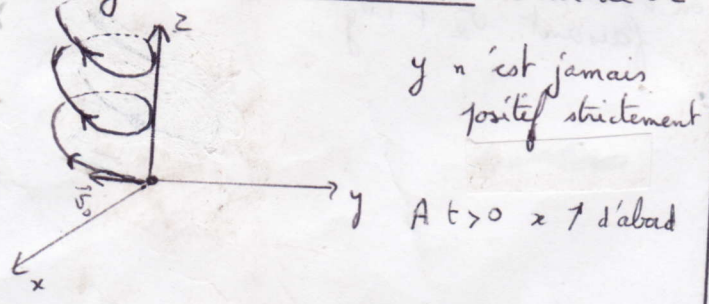
$v_y = -v_{\perp} \sin(\omega_c t)$

3  $\rightarrow v_z = v_{\parallel}$

4) Intégrer avec les conditions initiales

$x = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin \omega_c t = \rho_L \sin \omega_c t$   
 $y = -\frac{v_{\perp}}{\omega_c} [\cos \omega_c t - 1] = \rho_L [\cos \omega_c t - 1]$   
 $z = v_{\parallel} t$

5) Trajectoire hélicoïdale autour de Oz



6) AN  $\rho_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$

$\omega_{ce} = \frac{e B_0}{m_e} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 4,5}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 7,8 \cdot 10^{11} \text{ rad/s}$

$\rho_{Le} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \left( \frac{2 \times 10^8 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \right) \frac{1}{7,8 \cdot 10^{11}} = 4,27 \mu\text{m}$

$\rightarrow \rho_{Le} = \sqrt{\frac{20 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5}} = 4,27 \mu\text{m}$

ion  $^{235}\text{U}^+$   $\omega_c$  est dans le rapport des masses  $\rightarrow \omega_c(^{235}\text{U}^+) = \frac{9,11 \cdot 10^{-31}}{235 \times 1,66 \cdot 10^{-27}} \omega_{ce}$

soit  $\omega_c(^{235}\text{U}^+) = 1,03 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$

$\omega_c(^{238}\text{U}^+) = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \omega_{ce}}{238 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = 1,04 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$

$\rho_L$  est dans le rapport des racines carrées de m

$\rightarrow \rho_L(^{235}\text{U}^+) = \sqrt{\frac{235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \rho_{Le} = 2,78 \text{ mm}$

$\rho_L(^{238}\text{U}^+) = \sqrt{\frac{238}{235}} \rho_L(^{235}\text{U}^+) = 2,80 \text{ mm}$

$\omega \sim 10^6 \text{ s}^{-1} \rightarrow f \sim 10^5 \text{ s}^{-1}$  ou  $10^5 \text{ Hz}$   
 $\omega = 2\pi f \rightarrow \lambda \sim \frac{c}{f} \sim 10^3 \text{ m}$  ondes radio

7) TC I appliqué à m soumis à  $\vec{E}$  et à  $\vec{B}$ :

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$  ; on va donc obtenir

les mêmes équations qu'en 1) mais avec en supplément la contribution de  $\vec{E}$ :

$\begin{cases} m \dot{v}_x = q B_0 v_y - q E_0 \sin \omega t \\ m \dot{v}_y = -q B_0 v_x - q E_0 \cos \omega t \\ m \dot{v}_z = 0 \end{cases}$

$\Delta$  signes  $\rightarrow$  qui s'intègre en :  
 $\Rightarrow m \underline{\dot{v}} = -j q B_0 \underline{v} - j q E_0 \underline{e}$

Posons  $\underline{v} = v_x + j v_y$  (c'est la fin par une résolution en réels)  
 $\underline{v} = \underline{v}_h + \underline{v}_p$  avec  $\underline{v}_h = A e^{-j \omega t}$  ( $\omega_c = \frac{q B_0}{m}$ )

On cherche  $\underline{v}_p$  sous la forme  $\underline{B} e^{-j \omega t}$  ;  $\underline{B}$  doit vérifier :  
 $-j m \omega \underline{B} = -j q B_0 \underline{B} - j q E_0$  soit  $\underline{B} = \frac{q E_0}{-q B_0 + m \omega}$   
 ou encore  $\underline{B} = \frac{q E_0}{m(\omega - \omega_c)}$

soit  $\underline{v}_p = -\frac{q E_0}{m(\omega - \omega_c)} e^{-j \omega t}$

Finalement :  $\underline{v} = A e^{-j \omega t} - \frac{q E_0}{m(\omega - \omega_c)} e^{-j \omega t}$

On trouve A avec les conditions initiales données à  $t=0$   $\underline{v}(t=0) = v_{\perp}$  d'où  $A = \frac{v_{\perp} + q E_0}{m(\omega - \omega_c)}$

On a bien l'expression donnée par le sujet.

8) La position s'obtient par intégration de  $\underline{v}$

$\underline{r}_{\perp} = \int \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{-j \omega t} + j \frac{q E_0}{m(\omega - \omega_c)} \left[ \frac{e^{-j \omega t}}{\omega} - \frac{e^{-j \omega t}}{\omega_c} \right] + cte$

Avec à  $t=0$   $\underline{r}_{\perp}(t=0) = 0$  d'où  $cte = -j \frac{v_{\perp}}{\omega_c} - j \frac{q E_0 (\omega - \omega_c)}{m(\omega - \omega_c) \omega_c}$

soit  $cte = -j \left( \frac{v_{\perp}}{\omega_c} + \frac{q E_0}{m \omega \omega_c} \right)$

$$x = \rho_L \sin \omega_c t + \frac{qE_0}{m(\omega_c - \omega)} \left[ \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]$$

$$y = \rho_L (\cos \omega_c t - 1) + \frac{qE_0}{m(\omega_c - \omega)} \left[ \frac{\cos \omega_c t}{\omega_c} - \frac{\cos \omega t}{\omega} + \frac{\omega_c - \omega}{\omega_c \omega} \right]$$

$$z = \frac{v}{\omega} t$$

9) Cas résonant:  $\omega = \omega_c$   
 Equa. diff. du 7) :  $m \ddot{\underline{w}} = -j q B_0 \underline{w} - j q E_0 e^{-j\omega_c t}$   
 Avec  $\omega_c = \frac{q B_0}{m}$  :  $\ddot{\underline{w}} = -j \omega_c \underline{w} - j q \frac{E_0}{m} e^{-j\omega_c t}$

Enoncé propose:  $\underline{w} = F(t) e^{-j\omega_c t}$   
 $\rightarrow \dot{F} - j\omega_c F = -j\omega_c F - j q \frac{E_0}{m} \rightarrow \dot{F} = -j q \frac{E_0}{m}$

$\rightarrow F = -j q \frac{E_0}{m} t + cte$   
 Avec C.I:  $\underline{w}(0) = \underline{v}_\perp$  soit  $F(0) = \underline{v}_\perp$  donc  $cte = \underline{v}_\perp$   
 $\Rightarrow F = -j q \frac{E_0}{m} t + \underline{v}_\perp \Rightarrow \underline{w} = \left( \underline{v}_\perp - j q \frac{E_0}{m} t \right) e^{-j\omega_c t}$

$e^{-j\omega_c t}$  indique une trajectoire circulaire  
 $\underline{v}_\perp - j q \frac{E_0}{m} t$  représente l'amplitude complexe  
 Sa norme conduit au rayon du cercle  
 c'est à dire  $\sqrt{\underline{v}_\perp^2 + q^2 \frac{E_0^2}{m^2} t^2}$  est le rayon du cercle  
 projection de la trajectoire sur Oxz.

Ce rayon croît avec le temps.  
 La trajectoire projetée est donc une spirale croissante.

10) Cas non résonant:  
 $\underline{z}_\perp = e^{j\omega_c t} \left[ j \rho_L + j \frac{q E_0}{m(\omega_c - \omega)} \left( \frac{1}{\omega_c} - \frac{e^{-j(\omega - \omega_c)t}}{\omega} \right) \right]$

amplitude complexe du "cercle" décrit (variable dans le temps de façon sinusoïdale par le terme  $e^{-j(\omega - \omega_c)t}$ ). L'amplitude du signal en  $e^{-j\omega_c t}$  est "modulée" par une sinusoïde de pulsation  $\omega - \omega_c = 0,05 \omega_c$ . On a donc 20 tours (ou 20 oscillations à  $\omega_c$ ) par une seule période de variation du rayon. On observe bien cela sur les courbes.

Cas résonant: on observe bien la croissance du rayon du "cercle"

7) Par une résolution en notation réelle: (méthode + longue et + calculatoire)  
 la combinaison des équations couplées mène par  $v_x$  à:  $\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = -\frac{qE_0}{m} (\omega + \omega_c) \cos \omega t$

La linéarité donne  $v_x = v_{xp} + v_{xp}$  avec  
 $v_{xp} = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t$

Essayons  $v_{xp} = C \cos \omega t$  alors  $-\omega^2 C + \omega_c^2 C = -\frac{qE_0}{m} (\omega + \omega_c)$   
 d'où  $C = -\frac{qE_0 (\omega + \omega_c)}{m(\omega_c^2 - \omega^2)} = -\frac{qE_0}{m(\omega_c + \omega)}$

Ainsi  $v_x = A \cos \omega_c t + B \sin \omega_c t - \frac{qE_0 \cos \omega t}{m(\omega_c + \omega)}$   
 on trouve A et B par la condition initiale

$v_x(t=0) = v_\perp \rightarrow A = v_\perp + \frac{qE_0}{m(\omega_c + \omega)}$   
 $v_x(t=0) = 0$  soit  $A = \frac{qE_0}{m(\omega_c + \omega)}$  à  $t=0$   
 $m \dot{v}_x = q B_0 v_y - q E_0 \sin \omega t \rightarrow m B \omega_c = 0 \rightarrow B = 0$

D'où finalement  $v_x = v_\perp \cos \omega_c t + \frac{qE_0}{m(\omega_c + \omega)} \cos \omega t - \frac{qE_0 \cos \omega t}{m(\omega_c - \omega)}$

Ce qui amène  $v_y = \frac{\dot{v}_x}{\omega_c} + \frac{E_0}{B_0} \sin \omega t$

soit  $v_y = -v_\perp \sin \omega_c t - \frac{qE_0}{m(\omega_c - \omega)} \sin \omega t + \frac{E_0 \sin \omega t}{B_0} + \frac{\omega q E_0 \sin \omega t}{\omega_c m(\omega_c - \omega)}$

soit  $v_y = -v_\perp \sin \omega_c t - \frac{qE_0 \sin \omega t}{m(\omega_c - \omega)} + \frac{qE_0 \sin \omega t}{m(\omega_c - \omega)}$   
 compte tenu de  $\omega_c = \frac{q B_0}{m}$

on obtient bien le  $\underline{w}$  de l'énoncé en faisant  $v_x + i v_y$

0,75 1)  $\vec{F}_m = -k'(y-y_0)\vec{j}$  si  $y = y_0$  alors  $F_m = 0$  (repos) si  $y = 0$  alors  $F_m > 0$  (ressort allongé de  $y_0$  donc tension vers le haut)

0,25 2) Equil  $\vec{F}_E + \vec{F}_m = \vec{0} \rightarrow F_{Ey} = k'(y-y_0)$  algébrique  
Comme il y a attraction électrostatique,  $y < y_0$  donc  $\vec{F}_m \uparrow$  sens de  $\vec{j}$  donc  $\vec{F}_E \downarrow$  opposé à  $\vec{j}$

0,5  $\rightarrow \left[ \|\vec{F}_{E,eq}\| = \|\vec{F}_{m,eq}\| = k'(y_0 - y) \right]$  Equil

3) 1<sup>er</sup> cas  $F_E$  toujours  $> F_m$   
2<sup>es</sup> cas  $F_E$  tangent à  $F_m$  en 1 point  
3<sup>es</sup> cas  $F_E$  coupe  $F_m$

$F_E = \frac{1}{2} K \frac{V^2}{y^2}$   $F_m = -k'(y-y_0)$

4) a) 1 seule position d'équil  $\rightarrow$  2<sup>es</sup> cas  
les tangentes sont égales en 1 point  $\rightarrow \begin{cases} \frac{dF_m}{dy} = \frac{dF_E}{dy} \\ F_m = F_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k' = -\frac{K V^2}{y_{eq}^3} \\ -k'(y_{eq} - y_0) = \frac{1}{2} K \frac{V^2}{y_{eq}^2} \end{cases}$

1,5 y\_0 (0,75 pour la justification de l'égalité des dérivées)  $\rightarrow \left[ y_{eq} = \frac{2}{3} y_0 \right]$  et  $\left[ V = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k'}{K}} \right]$

Stabilité? si  $y > y_{eq}$  alors  $F_E \downarrow > F_m \uparrow$  (cf courbe) on repasse par  $y_{eq}$   
mais si  $y < y_{eq}$  alors  $F_E \downarrow > F_m \uparrow$  on s'éloigne de  $y_{eq} \Rightarrow$  instable

b) si  $0 < V < V_0$  alors  $F_E$  a une ordonnée + faible au point  $\frac{2}{3} y_0 (= y_{eq})$   
 $\rightarrow$  il y a donc coupure de  $F_E$  avec  $F_m \rightarrow$  3<sup>es</sup> cas  $\rightarrow$  2 positions d'équil  
pour le point  $y$  le + petit, si  $y \downarrow F_E > F_m$  et  $y \downarrow$  encore  $\rightarrow$  instable  
grand, si  $y \downarrow F_E < F_m$  et  $y \uparrow$  }  $\rightarrow$  stable  
si  $y \uparrow F_E > F_m$  et  $y \downarrow$

5) Pour  $V = 100$  V,  $V = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{k'}{K}} \rightarrow \left[ k' = K \cdot \frac{3}{2} \times \frac{9}{4} \frac{V^2}{y_0^3} \right]$

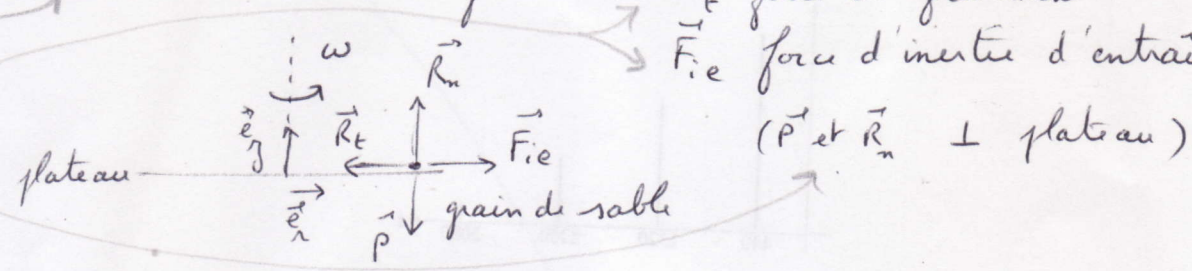
0,75  $k' = 9 \cdot 10^{16} \times \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} \times \frac{100^2}{3^3 \cdot 10^9} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$

0,25 Se pose la question : étude dans quel référentiel ?

0,25 Si choisi dans le réf. du plateau, constater que 'il est non galiléen  
 0,25 en justifiant car en rotation / réf de la salle.

0,25 et constater que le mouvement dans ce réf du plateau est un équilibre relatif

0,25 Schema et bilan des forces :  $\vec{R}_t$  force de frottement  
 0,5  $\vec{F}_{ie}$  force d'inertie d'entraînement  
 0,25 ( $\vec{P}$  et  $\vec{R}_n \perp$  plateau)



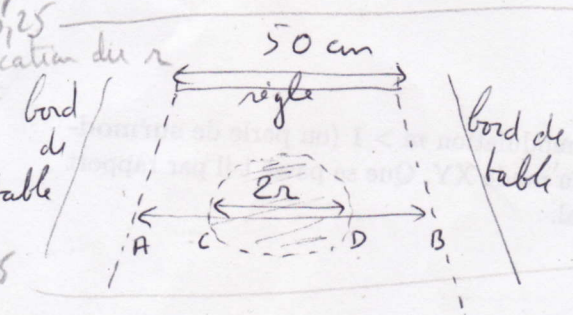
0,25 A la limite au bord, c'est pour 1 grain de la circonférence,  
 $|R_t| = f R_n$  on est à la limite de l'égalité, bien que ce soit  
 0,5 statique pour ce grain de sable, mais il suffirait de le sortir  
 un tout petit peu du tas circulaire et il glisserait et là on  
 aurait l'égalité dès qu'il sort du tas circulaire.

0,75 Force d'inertie d'entraînement :  $F_{ie} = m\omega^2 r$   $m$ : masse du grain  
 $r$ : sa distance à l'axe de rotation

0,25 PFD ds  $R_{\text{plateau}}$  (non gal) :  $\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{R}_t + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$   $\nearrow$  équil. relatif

0,5 Proj<sup>n</sup> sur  $\vec{e}_r$   $m\omega^2 r = |R_t|$   
 0,25  $\vec{e}_z$   $mg = R_n$   
 loi de Coulomb  $|R_t| = f R_n$   $\Rightarrow r\omega^2 = fg$

0,5 d'où  $f = \frac{r\omega^2}{g} = \left(\frac{60 \times 2\pi}{60}\right)^2 \times \frac{13,4 \times 10^{-2}}{9,8} = 0,54$



Au double décimètre, on mesure  $AB = 8$  cm  
 $CD = 4,3$  cm

d'où  $2r = \frac{4,3 \times 50}{8} \Rightarrow r = 13,4$  cm

0,25 Si le choix est le réf de la salle, alors PFD :  $\vec{P} + \vec{R}_t + \vec{R}_n = m\vec{a}$   
 0,5 pour  $\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$  avec  $\vec{a} = m r \omega^2 \vec{e}_r$  dans  $R_g$

$R_g$ : référentiel fixe: galiléen  
 1)  $R$  référentiel du cerceau: non galiléen car en rotation /  $R_g$

$\vec{v}_R(P) = v_{rel} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta = a \dot{\theta} (-\sin\theta \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z)$

P décrit dans son entraînement un cercle de rayon  $a \cos\theta$  à la vitesse angulaire  $\dot{\psi}$

$\vec{v}_e(P) = a \cos\theta \dot{\psi} (-\vec{e}_x)$

$\vec{L}_O(P) = m \vec{OP} \wedge \vec{v}_R(P)$

avec  $\vec{OP} = a \vec{e}_r$  et  $\vec{v}_R(P) = \vec{v}_R(P) + \vec{v}_e(P)$   
 $\rightarrow \vec{L}_O(P) = ma^2 \vec{e}_r \wedge [-\dot{\theta} \sin\theta \vec{e}_y + \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_z - \dot{\psi} \cos\theta \vec{e}_x]$

$\vec{L}_O(P) = ma^2 [\dot{\theta} \sin^2\theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos^2\theta \vec{e}_x + \dot{\psi} \cos\theta \vec{e}_y]$

$\vec{L}_O(P) = ma^2 [\dot{\theta} \vec{e}_x - \dot{\psi} \cos\theta \sin\theta \vec{e}_y + \dot{\psi} \cos^2\theta \vec{e}_z]$

2)  $L_{Oz}(C) = I \dot{\psi} = \frac{1}{2} ma^2 \dot{\psi}$

on admet que  $L_{Oz}(C) = \vec{L}_O(C) \cdot \vec{e}_z$   
 $\vec{L}_O = \vec{L}_O(P) + \vec{L}_O(C) = ma^2 [\dot{\theta} \vec{e}_x - \dot{\psi} \cos\theta \sin\theta \vec{e}_y + \dot{\psi} \cos^2\theta \vec{e}_z + \frac{1}{2} \dot{\psi} \vec{e}_z]$

$L_{Oz} = ma^2 \dot{\psi} (\frac{1}{2} + \cos^2\theta)$

3)  $\omega = \dot{\psi}$

TNC à (S) ds  $R_g$ :  $\frac{dL_{Oz}}{dt} = \Gamma + M_{Oz}(\vec{P}, \vec{R})$

$M_{Oz}(\vec{P}) = M_{Oz}(\vec{P}_{(C)}) + M_{Oz}(\vec{P}_P)$

justifications  $\vec{P}_{(C)}$  et  $\vec{P}_P \parallel \vec{e}_z \Rightarrow M_{Oz}(\vec{P}) = 0$

Liaison parfaite en A et B  $\Rightarrow M_{Oz}(\vec{R}) = 0$

$\rightarrow \frac{dL_{Oz}}{dt} = \Gamma$

$\rightarrow \frac{d(ma^2 \omega (\frac{1}{2} + \cos^2\theta))}{dt} = \Gamma$

$\omega = ct \rightarrow 2ma^2 \omega \cos\theta (-\sin\theta) \dot{\theta} = \Gamma$

4) Dans  $R$  cerceau non galiléen:

$m \vec{a}_R = \vec{P}_P + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$  ( $R_g$ : le couple est l'ensemble de 2 forces égales et opposées)

avec  $\vec{a}_R = -a \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$   
 à  $\omega$  cte  $\vec{F}_{ie} = m \omega^2 \vec{HP}$   
 soit  $\vec{F}_{ie} = m \omega^2 a \cos\theta \vec{e}_r$

$\vec{F}_{gyro} = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$   
 $\vec{F}_{ic} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_R = -2m \omega \vec{e}_r \wedge a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$\vec{F}_{ic} = -2m \omega a \dot{\theta} \sin\theta \vec{e}_x$   
 Pas de frottement  $\Rightarrow \vec{R} \perp \vec{e}_\theta$  ou  $R_\theta = 0$   
 Projection sur  $\vec{e}_\theta$ :  $ma \ddot{\theta} = -mg \cos\theta - m \omega^2 a \cos\theta \sin\theta$

$\rightarrow \ddot{\theta} = -g \cos\theta - \omega^2 \cos\theta \sin\theta$   
 ( $\omega = \dot{\psi}$ )

5) Pas de frottement:  $R_\theta = 0$

Proj sur  $\vec{e}_r$ :  $-ma \dot{\theta}^2 = -mg \sin\theta + R_r + m \omega^2 a \cos\theta$   
 d'où  $R_r = mg \sin\theta - ma (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos\theta)$

Proj sur  $\vec{e}_x$ :  $0 = -2m \omega a \dot{\theta} \sin\theta + R_x$   
 d'où  $R_x = 2m \omega a \dot{\theta} \sin\theta$

6) Equilibre relatif pour  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\ddot{\theta} = 0$   
 cf 4)  $\rightarrow -\cos\theta (g + \omega^2 a \sin\theta) = 0$   
 $\rightarrow \cos\theta_{eq} = 0$  ou  $\sin\theta_{eq} = -\frac{g}{a \omega^2}$

soit  $\theta_{eq} = \frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$  ou  $\sin\theta_{eq} = -\frac{g}{a \omega^2}$

$\sin\theta_{eq} = -\frac{g}{a \omega^2}$  existe si  $\frac{g}{a \omega^2} < 1$

