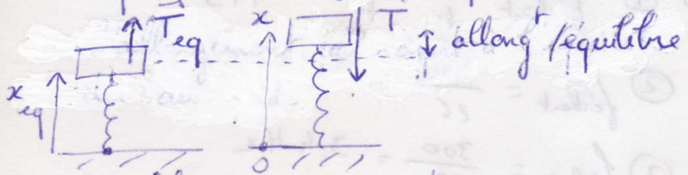
Mines Ponts PC 16

1) Syst $\{m\}$ ds $\mathcal{R}_{gal}\ (O, \vec{u}_x)$

$$m\ddot{x}\vec{u}_x = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_f \quad \Rightarrow \quad \left(m\ddot{x}\vec{u}_x = (\vec{T} - \vec{T}_{eq}) + \vec{F}_f\right)$$

Equil $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T}_{eq}$

$\vec{T} - \vec{T}_{eq} = -k \times$ allongement/équilibre $\vec{u}_x$



équilibre mouvement

$\vec{T}_{eq} = -k(x_{eq} - l_0)\vec{u}_x \qquad (x_{eq} < l_0)$

$\vec{T} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$

$\vec{T} - \vec{T}_{eq} = -k(x - x_{eq})\vec{u}_x$

$\vec{T}_{eq} = -\vec{P} \Rightarrow -k(x_{eq} - l_0)\vec{u}_x = -mg(-\vec{u}_x)$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

donc $\vec{T} - \vec{T}_{eq} = -k\left(x - l_0 + \frac{mg}{k}\right)\vec{u}_x$

d'où $m\ddot{x} = -k\left(x - l_0 + \frac{mg}{k}\right) - \alpha\dot{x}$

soit $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - l_0 + \frac{mg}{k}\right) = 0$

Posons $X = x - \tilde{x}$ avec $\tilde{x} = l_0 - \frac{mg}{k}$

alors $\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$

ou $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$

avec $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ $\boxed{\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}}$ $\boxed{\tilde{x} = l_0 - \frac{mg}{k}}$

ou $\boxed{\tilde{x} = l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}}$

ω_0 est la pulsation propre du système

ξ est un coefficient d'amortissement

2) Cas $\xi = 0$ (pas d'amortissement)

$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$

$X = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

C.I. $X_0 = A$, $V_0 = B\omega_0$ $\Rightarrow \boxed{X = X_0\cos\omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$

Cas $0 < \xi < 1$

$\Delta' = \xi^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$

oscillations amorties

$$X = e^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)\right]$$

C.I: $X_0 = A$

$V_0 = -\xi\omega_0 X_0 + B\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow B = \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

$$\rightarrow \boxed{X = e^{-\xi\omega_0 t}\left[X_0\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)\right]}$$

Si du vent impose $\beta\dot{x}\vec{u}_x$ en supplément, alors cela revient à remplacer α par $(\alpha - \beta)$ et à remplacer ξ par $\xi_{vent} = \frac{\alpha - \beta}{2\sqrt{mk}}$

Du coup ξ_{vent} peut devenir < 0 ce qui donnerait des oscillations amplifiées puisque $e^{-(\xi_{vent}\omega_0 t)} \nearrow$ avec t si $\xi_{vent} < 0$.

Amplification $\Rightarrow$ résonance et cassure de la structure

3) Le PFD devient $m\ddot{x}\vec{u}_x = (\vec{T} - \vec{T}_{eq}) + \vec{F}_f + \vec{F}$

ce qui modifie en $\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F}{m}}$

Comme $\vec{F} = (-F_0 - F_1\cos(2\pi f t))\vec{u}_x$

$$\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)}$$

Avec $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ ($\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ est une constante)

$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$

En notation complexe $(\omega = 2\pi f)$

$(-\omega^2 + 2i\xi\omega\omega_0 + \omega_0^2)\,\underline{Y} = -\frac{F_1}{m} = -\underline{E}$

d'où $\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = -\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\xi\omega_0}$

$$\boxed{\underline{H} = -\frac{1}{\omega_0^2\left((1 - \Omega^2) + 2i\xi\Omega\right)} \qquad \Omega = \omega/\omega_0}$$

4) $|\underline{H}| = \frac{1/\omega_0^2}{\ldots}$

Un phénomène de résonance peut arriver si le dénominateur présente un minimum en fonction de $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$

Dérivons l'intérieur de la racine carrée (qui a la m monotonie que la racine)

$$\frac{d\left((1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\right)}{d\Omega} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-2(1-\Omega^2)2\Omega + 8\xi^2\Omega = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\Omega^2 - 1 = -2\xi^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Omega^2 = 1 - 2\xi^2}$$

Cela ne peut se réaliser que si $1-2\xi^2 > 0$

càd pour $\boxed{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}}$ (il ne faut pas un trop fort amortissement)

Dans ce cas la résonance a lieu à $\Omega_r = \sqrt{1-2\xi^2}$ soit à $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$

$$\text{Alors } |\underline{H}|_{(\omega_r)} = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1-(1-2\xi^2)\right)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}$$

$$\text{soit } \boxed{|\underline{H}|_{(\omega_r)} = \frac{1}{\omega_0^2\, 2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}}$$

si $\xi^2 \ll 1$ alors $\boxed{|\underline{H}|_{(\omega_r)} \simeq \frac{1}{2\omega_0^2\xi}}$

5) La courbe (1) montre un max à $\omega_r = 12\ \text{rad}\,s^{-1}$

La valeur de ce max est lu à $|\underline{H}(\omega_r)|$ tel que $\omega_0^2|\underline{H}_{max}| = 9$ dB càd $20\log(\omega_0^2|H_{max}|) = 9$

donc $\omega_0^2|H_{max}| = 10^{\frac{9}{20}}$

Ainsi $\begin{cases} \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} = 12 \Rightarrow \boxed{\omega_0 \simeq 12\ \text{rad}\,s^{-1}} \ (\text{car } \xi^2 \ll 1) \\ \frac{1}{2\xi} = 10^{\frac{9}{20}} \end{cases}$

$\hookrightarrow \underline{\xi = 0{,}18}$

(On peut considérer que $0{,}18^2 \ll 1$)

6) Si l'action périodique a le hasard d'être à la pulsation de résonance de la structure, c'est la catastrophe

7) Il faut un capteur qui transforme une action mécanique (la marche) en signal électrique. Les piezo ont cette propriété.

8) Calculons la fréquence d'échantillonnage de chaque spectre

spectre ① $f_{échat} = \frac{300}{t_{max} - t_{min}} = \frac{300}{179} = 1{,}7$ Hz

② $f_{échat} = \frac{300}{26} = 11$ Hz

③ $f_{échat} = \frac{300}{89} = 3{,}4$ Hz

④ $f_{échat} = \frac{300}{9} = 33$ Hz

Shannon indique la nécessité que $f_{échat} > 2 f_{propre}$

On ~~énoncé du début dit que~~ la marche s'effectue à $f_{propre} \sim 1$ Hz

Donc spectres ① et ③ ne sont pas suffisamment échantillonnés : inexploitables

Étant donné que le signal marche contient des harmoniques à $f > 2$ Hz il faut que $f_{échat} >$ fréquences des harm.

Plus $f_{échat}$ est grande mieux c'est.

Le spectre ④ est donc le + pertinent

On remarque un pic à 0 Hz (continu dû à F_0)

puis un fondamental à 2Hz ce qui correspond à la "sinusoïde" de période 0,5 s sur la fig 2.

Vient ensuite un pic d'harmonique à 4 Hz ce qui correspond à une variation $\sim$ de période $\frac{1}{4} = 0{,}25$ s

puis un pic d'harmonique à 6Hz d'où une variation $\sim$ de période $\frac{1}{6} = 0{,}17$ s

On peut reconnaître grossièrement ces variations $\sim$ sur la figure 2

9) Le problème du Millennium Bridge est d'avoir comme pulsation propre celle de la marche (lire tout début d'énoncé $\sim$ Hz)

Courbe 1 fig 3 : $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 1{,}9$ Hz $\left(\frac{12}{2\pi}\right)$

Courbe 2 fig 3 : l'amortisseur harmonique déplace la fréquence de résonance de la structure $f_1 = \frac{8}{2\pi} = 1{,}3$ Hz et $f_2 = \frac{15}{2\pi} = 2{,}4$ Hz

De plus l'amplitude en f_1 et f_2 sont réduites (coefficients d'amortissement + forts)

Surtout on remarque un minimum en $\omega = 12$ rads^{-1}

Càd que pour la fréquence marche normale, l'amplitude est alors très fortement réduite : $20 \log(\omega_0^2 |H|_{ma}) \simeq 1$

soit $10^{\frac{1}{20}} \simeq \frac{1}{2\xi} \longrightarrow \xi = \frac{1}{2.10^{\frac{1}{20}}} = 0,45$

(on est à la limite de pouvoir dire $\xi^2 \ll 1$)