

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2002

FILIÈRE PC

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Mesure de distances et de vitesses  
à l'aide d'une diode laser

De nombreuses situations expérimentales, en particulier en robotique, requièrent une mesure de distances et de vitesses d'une manière relativement simple et aussi peu coûteuse que possible. Le but de ce problème est de montrer comment cet objectif peut être atteint à l'aide d'une diode laser, source de lumière que l'on supposera monochromatique et dont la fréquence peut être légèrement modifiée par un courant de commande.

I - Diode laser

Dans tout le problème, la diode est constituée par un milieu homogène, transparent, d'indice  $n$ , limité par des faces planes et parallèles distantes de  $L$ ; elle est placée dans le vide (figure 1). Entre ces faces formant cavité, l'onde optique est constituée de deux ondes progressives, supposées planes, se propageant en sens inverse, perpendiculairement aux faces; la direction commune de propagation sera choisie comme axe  $Oz$ . Polarisée linéairement, chaque onde sera représentée par l'amplitude complexe  $E(z)$  du champ électrique dont la dépendance temporelle est de la forme  $\exp(-i\omega t)$ .

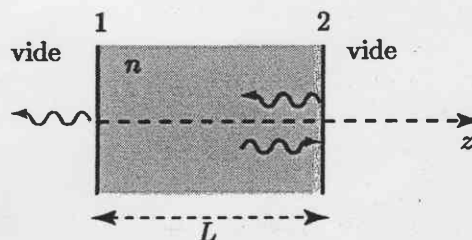


Figure 1

1. En utilisant les relations de continuité du champ électromagnétique, déterminer le coefficient de réflexion  $r$  en amplitude sur une face de la cavité (milieu  $\rightarrow$  vide) en fonction de  $n$  ainsi que le coefficient de transmission  $t$  correspondant.

2. Soit  $E_0$  l'amplitude complexe, au niveau de la face 2 (figure 1), de l'onde qui arrive sur cette face. On désigne par  $k$  le module du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans le vide. Exprimer l'amplitude de l'onde après un aller et retour complet dans la cavité en fonction de  $E_0, r, k, L$  et  $n$ .

3. En fait, au cours de son trajet dans la cavité, l'onde est amplifiée par le phénomène appelé émission induite. Une manière d'exprimer cette propriété est d'utiliser un indice complexe  $n_c$  tel que  $n_c = n - ig$  avec  $g > 0$ .

a) Justifier la forme de cette expression.

b) Trouver la relation qui doit exister entre  $r, n_c, k$  et  $L$  pour qu'il y ait un régime permanent d'amplitude constante. Cette relation sera dans la suite dénommée « condition laser ».

4. On suppose  $g \ll n$ , ce qui permet d'utiliser pour  $r$  l'expression obtenue en 1. En régime permanent, la diode laser n'émet que pour des fréquences particulières  $\nu_p$  situées dans une certaine plage.

a) Déterminer l'écart  $\Delta\nu$  entre deux fréquences consécutives possibles  $\nu_p$  et  $\nu_{p+1}$  de l'onde, (dans la condition laser).

b) On appelle « coefficient d'amplification » le facteur  $\alpha = kg$ . Déterminer en fonction de  $L$  et  $r$  la valeur  $\alpha_0$  que doit avoir  $\alpha$  en régime permanent ?

5. Application numérique. On donne  $n = 3,40$  et  $L = 0,5$  mm.

a) Calculer  $\Delta\nu, r$  et  $\alpha_0$ .

b) La longueur d'onde  $\lambda$  de l'oscillation laser est voisine de 845 nm ; calculer la valeur  $g_0$  de  $g$  correspondante ; justifier l'approximation faite sur la valeur de  $r$  à la question 4.

6. L'amplification dans un milieu laser nécessite une « inversion de populations », c'est-à-dire que le niveau supérieur de la transition optique soit plus peuplé que le niveau inférieur. L'émission induite tend à diminuer cette inversion, ce qui entraîne que le coefficient d'amplification  $\alpha$  décroît lorsque l'intensité  $I$  de l'onde optique croît ; l'intensité  $I$  est définie ici comme la puissance de chaque onde progressive à l'intérieur de la cavité. On admettra que la relation entre  $\alpha$  et  $I$  est de la forme :  $\alpha(I) = \frac{\alpha_m}{1 + I/I_0}$  où  $\alpha_m$  et  $I_0$  sont deux constantes. On donne  $\alpha_m = 2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$ ,  $I_0 = 10 \text{ mW}$ .

Calculer  $I$  en régime permanent et la puissance de sortie  $I_s$  du faisceau laser par l'une des faces.

## II - Principe des mesures de position et de vitesse d'un obstacle

Dans cette partie, on étudie qualitativement l'effet sur le fonctionnement d'une diode laser de l'onde émise puis réfléchi (ou rétrodiffusée) par un obstacle extérieur et revenant dans la cavité, puis le principe de son utilisation aux mesures de position et de vitesse d'un obstacle.

Le dispositif est modélisé selon le schéma de la figure 2; soit  $\rho$  réel positif le coefficient de réflexion en amplitude sur l'obstacle, qui avec la face 2 forme une cavité de longueur  $D$ . On supposera  $\rho \ll 1$ . On désigne par  $\nu_p$  la fréquence d'oscillation de la diode laser en l'absence d'obstacle.

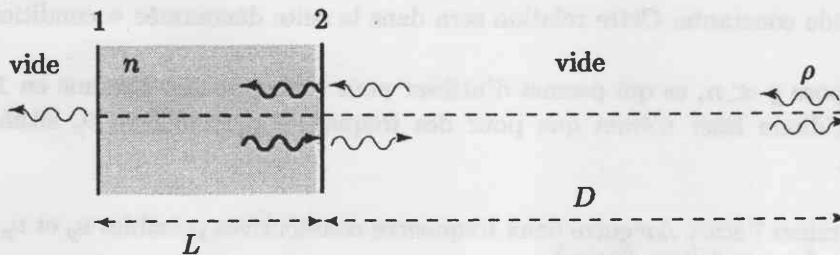


Figure 2

1. Justifier sans calcul que, lorsque l'onde, sortant de la face 2, y revient en phase après un aller et retour, la puissance du faisceau laser est maximale, et que le coefficient d'amplification est minimal. Justifier de même que la puissance du faisceau est minimale si l'onde revient en opposition de phase.

L'indice  $n$  du milieu dépend du courant d'alimentation de la diode; en faisant varier ce courant, on modifie la fréquence de fonctionnement  $\nu_p$ ; on supposera dans toute cette partie II. que cette fréquence est imposée par le contrôle du courant d'alimentation.

2. Par une rampe de courant, on réalise une croissance monotone de  $\nu_p$  à  $\nu_p + \Delta\nu_p$ ; l'obstacle est fixe. On observe que la puissance émise passe par une succession de maximums.

- Quelle est la différence de fréquence  $\delta\nu$  entre deux maximums consécutifs ?
- Déterminer la relation entre le nombre  $N_D$  de maximums détectés,  $\Delta\nu_p$ ,  $c$  et la distance  $D$ .
- Pour  $\Delta\nu_p = 50$  GHz, exprimer  $D$  en fonction de  $N_D$ ; quelle incertitude sur la mesure de  $D$  a-t-on par ce comptage ?

3. On suppose maintenant la fréquence  $\nu_p$  fixe et l'obstacle mobile avec la vitesse  $v$  telle que  $D(t) = D_0 + vt$ . Durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , on détecte  $N_v$  maximums de puissance laser. En utilisant les résultats précédents (2.a)), déterminer la relation entre  $v$ ,  $\Delta t$ ,  $\nu_p$ ,  $c$  et  $N_v$  en supposant la vitesse constante durant  $\Delta t$ . Pour  $\Delta t = 20$  ms, quelle est la résolution de la détermination de la vitesse à partir de  $N_v$ ? ( $\lambda_p = 845$  nm dans le vide)

4. L'obstacle étant animé de la vitesse  $v$ , on impose au courant de commande de la diode une loi de variation « triangulaire » de durée totale  $T$ ; la variation de la fréquence laser suit la

même loi : croissance de  $\Delta\nu_p$  durant  $T/2$ , puis décroissance jusqu'à la valeur de départ  $\nu_p$  durant  $T/2$ . On observe  $N_1$  maximums durant la première phase et  $N_2$  durant la seconde. Dans cette question, on suppose la vitesse  $v$  suffisamment grande et positive; d'autre part, pour simplifier, on traitera  $N_1$  et  $N_2$  comme des variables continues.

Déduire la distance et la vitesse de l'obstacle en fonction de  $\Delta\nu_p, T, N_1, N_2$  et la longueur d'onde  $\lambda_p$  du rayonnement. On pourra exprimer  $N_1 + N_2$  et  $N_1 - N_2$  avant cette déduction. ( $\lambda_p$  dans le vide).

### III - Diode laser avec cavité extérieure

Dans cette partie, on analyse quantitativement l'effet de l'onde réfléchie par l'obstacle (cf. partie II) sur l'intensité émise par la diode.

1. Soient  $r'$  et  $t'$  les coefficients de réflexion et de transmission pour les amplitudes dans le sens vide  $\rightarrow$  milieu; calculer  $r'$  et  $t'$  en fonction de  $n$ ; montrer que  $r + r' = 0$  et que  $r^2 + t't = 1$ .

2.a) En appliquant les relations de continuité aux ondes arrivant sur la face 2 ou en repartant (cf. figure 2), montrer que l'on peut assimiler l'ensemble à une cavité laser, de longueur  $L$  identique à l'initiale, mais avec un coefficient de réflexion  $Z$  sur la face 2 donné, avec  $\theta = 2kD$ , par :  
(et un coefficient de transmission  $t_2$  sur la face 2 en présence de l'onde retour)

$$Z = \frac{r + \rho \exp(i\theta)}{1 + r\rho \exp(i\theta)}$$

b) Simplifier l'expression de  $Z$  en ne gardant que les termes du premier ordre en  $\rho$ .

Dans la suite, on posera  $a = \rho \left( \frac{1}{r} - r \right)$  avec  $a \ll 1$ .

3.a) Donner dans cette situation la nouvelle expression de la « condition laser ».

b) En déduire le coefficient d'amplification  $\alpha$  qui maintient l'oscillation en fonction de  $r, L, a$  et  $\theta$ . ( $a \ll 1$ ), on effectuera un d.p. d'ordre 1 en  $a$

c) Soit  $\delta\alpha$  l'excursion maximale de  $\alpha$  lorsque le déphasage de l'onde retour varie; exprimer  $\delta\alpha/\alpha_0$  en fonction de  $a$  et  $r$ ,  $\alpha_0$  étant la valeur de  $\alpha$  pour  $\rho = 0$  (cf. I.4.b)). En donner la valeur numérique pour  $\rho = 1 \times 10^{-3}$ .

4.a) Montrer que l'intensité du faisceau laser émis varie en fonction du déphasage de l'onde à son retour. Pour quelles valeurs de  $\theta$  est-elle maximale? Quelle est alors la fréquence d'émission?

b) Calculer, avec les données numériques précédentes, la variation relative de l'intensité du faisceau laser  $(I_{\max} - I_{\min})/I$ ,  $I$  étant l'intensité moyenne obtenue lorsque  $\alpha = \alpha_0$ .

#### IV - Analyse de la forme du signal

L'expérience montre que, lors du déplacement de l'obstacle ou lors d'un balayage de fréquence par modification du courant de commande (cf. partie II), on observe bien des variations presque périodiques de la puissance émise mais souvent avec des discontinuités associées à des sauts de fréquence. C'est cet effet qui est analysé dans cette dernière partie.

1. À partir de la « condition laser » obtenue en III.3.a), montrer, pour  $a \ll 1$ , que la fréquence d'oscillation est déterminée par la relation approchée :

$$n \frac{L}{D} \theta + a \sin \theta = p 2\pi \quad \text{avec } p \text{ entier.}$$

2. Pour un courant de commande fixé et en l'absence d'obstacle ( $a = 0$ ), on note  $n_0$  et  $g_0$  les valeurs de l'indice  $n$  et du coefficient  $g$  du milieu, et  $k_0$  le module du vecteur d'onde.

En présence de l'obstacle, à la modification  $\delta g = g - g_0$  est associée en fait une modification  $\delta n = n - n_0$  de l'indice, avec  $\delta n = \beta \delta g$ , où  $\beta$  est un coefficient positif de l'ordre de quelques unités; cela entraîne une modification de  $k$  :  $\delta k = k - k_0$ .

a) En linéarisant le résultat obtenu en III.3., montrer que :  $g_0 \delta k + k_0 \delta g = -\frac{a}{2L} \cos \theta$ .

b) Montrer de même que la « condition laser » s'écrit :  $n_0 \delta k + k_0 \delta n = -\frac{a}{2L} \sin \theta$ .

c) Justifier l'hypothèse  $\beta g_0 \ll n_0$ , et exprimer  $n_0 \delta k$  en fonction de  $a, L, \beta$  et  $\theta$ .

3. Montrer que la relation déterminant  $k$  se met sous la forme :

$$A - B\theta = \sin(\theta - \varphi)$$

avec  $\beta = \tan \varphi$ , et donner les expressions de  $A$  et  $B$  en fonction de  $p, a, n_0, L, D$  et  $\beta$ . Calculer  $\varphi$  avec  $\beta = 6$ . Évaluer  $A$  et  $B$  pour  $\rho = 1 \times 10^{-3}$  et  $D = 0,5$  m.

4. En vue d'effectuer une analyse graphique de cette équation, préciser la valeur  $\theta_0$  de  $\theta$  qui annule  $A - B\theta$  et tracer le graphe de  $\sin(\theta - \varphi)$  au voisinage de  $\theta_0$ . Porter sur ce graphe les points  $M$  correspondant aux maximums d'intensité du laser et les points  $m$  correspondant aux minimums.

5.a) À courant de commande fixé, donc  $n_0$  fixé, on augmente  $D$ . En traçant localement le graphe de  $A - B\theta$  au voisinage de  $\theta_0$  et en suivant son déplacement (on notera que  $A \gg 1$ ), montrer graphiquement que, pour  $B > 1$ ,  $\theta$  augmente de façon continue et, pour  $B < 1$ , par parties continues séparées par des sauts. *On négligera la variation de B.*

b) Lorsqu'ils existent, ces sauts de  $\theta$  sont accompagnés de sauts d'amplitude du faisceau laser; quel est le sens de cette variation?

c) Dans les mêmes conditions, on diminue  $D$ ; quel est alors le sens de variation des sauts d'intensité?

I.1.) Absence de  $\sigma$  et de  $\vec{j}_s$  : continuité de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$

Continuité de  $E$  :  $E_i + E_r = E_t$   
 Par def<sup>n</sup> :  $E_r = r E_i$  et  $E_t = t E_i$  }  $\Rightarrow \boxed{1+r=t}$  (1)

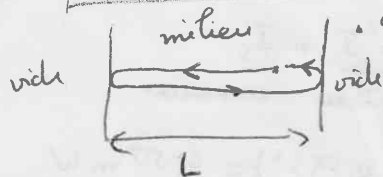
Continuité de  $B$  :  $B_i + B_r = B_t$

Rel<sup>n</sup>  $E$  et  $B$  par o.c.m. plane :  $\frac{c}{n} B = E$   $\Delta$  au sens de propag<sup>n</sup> :  $\left. \begin{aligned} \frac{c}{n} B_i &= E_i \\ -\frac{c}{n} B_r &= E_r \\ c B_t &= E_t \end{aligned} \right\}$   
 (ou  $\frac{\vec{p}}{\hbar} \wedge \vec{E} = \vec{B}$ )

$\Rightarrow n E_i - n E_r = E_t$  soit  $\boxed{n(1-r)=t}$  (2)

De (1) et (2) on déduit  $\boxed{r = \frac{n-1}{n+1}}$   $\boxed{t = \frac{2n}{n+1}}$

2. h dans le vide



au cours d'1 aller et retour, l'o.c.m. a parcouru  $2L$   
 Comme elle a une amplitude en  $e^{-i\omega t + ik_{milieu} x}$   
 on obtiendra donc  $e^{-i\omega t + ik_{milieu} 2L}$

Elle aura aussi subi 2 réflexions (milieu  $\rightarrow$  vide), d'où un facteur  $r^2$  dans l'amplitude.

Finalement  $E_{1\text{aller retour}} = r^2 E_0 e^{ik_{milieu} 2L}$  }  $\Rightarrow \boxed{E_{1\text{aller retour}} = E_0 r^2 e^{ik_n 2L}}$

$k_{milieu} = \frac{\omega}{\frac{c}{n}} = k_n$

a.  $e^{ik_n 2L} = e^{ik_n 2L (n-ig)} = e^{ik_n 2L} \times e^{k_n 2L g}$   
 amplifie l'amplitude

b. Amplitude de  $e \Rightarrow E_{1\text{aller retour}} = E_0 \Rightarrow \boxed{r^2 e^{ik_n 2L} = 1}$  condition laser

soit  $r^2 e^{ik_n 2L} e^{k_n 2L g} = 1$ ; possible si  $\boxed{r^2 e^{k_n 2L g} = 1}$   
 et  $\boxed{k_n 2L = 2p\pi}$  avec  $p$  entier

4. a.  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi}$   
 $\frac{h}{(vide)} = \frac{\omega}{c}$

condition laser (ou rég. permanent)  $k = \frac{p\pi}{Ln}$

$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{cp}{2Ln}}$   
 De m<sup>o</sup>  $\nu_{p+1} = \frac{c(p+1)}{2Ln}$

$\rightarrow \boxed{\Delta \nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c}{2Ln}}$

b. (cf 3.b) condition laser  $\Rightarrow r^2 e^{k_n 2L g} = 1$   
 énoncé :  $\alpha = k_n g$  }  $\Rightarrow \alpha 2L = \ln\left(\frac{1}{r^2}\right) \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\ln r}{L}}$

I.5.a.  $\Delta \nu = \frac{c}{2Ln} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 0,5 \times 10^{-3} \times 3,4} = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$  (2)

$r = \frac{n_c - 1}{n_c + 1} \approx \frac{n - 1}{n + 1} = \frac{3,4 - 1}{3,4 + 1} = 0,545$

$\alpha_0 = -\frac{\ln r}{L} = -\frac{\ln 0,545}{0,5 \times 10^{-3}} = 1210 \text{ m}^{-1}$

b.  $\alpha_0 \stackrel{v}{=} k g_0 \Rightarrow g_0 = \frac{\alpha_0 \lambda}{2\pi} = \frac{1210 \times 845 \times 10^{-9}}{2\pi} = 1,63 \cdot 10^{-4} \ll 1$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$  (k et λ de vide)  
d'où  $n_c = n - i g = 3,40 - i \times 1,63 \cdot 10^{-4}$  et  $r_{\text{vrai}} = \frac{n_c - 1}{n_c + 1} = \frac{2,40 - i \times 1,63 \cdot 10^{-4}}{4,40 - i \times 1,63 \cdot 10^{-4}}$

$|r_{\text{vrai}}| \approx r = 0,545$

I.6.  $\alpha(I) \stackrel{v}{=} \frac{\alpha_m}{1 + \frac{I}{I_0}} \Rightarrow I = I_0 \left[ \frac{\alpha_m}{\alpha_0} - 1 \right] = 10 \times 10^{-3} \left[ \frac{2 \times 10^{-3}}{1210} - 1 \right] = 6,5 \text{ mW}$

conservation de l'énergie :  $I = \frac{r^2 I}{\text{réfléchi}} + \frac{I_S}{\text{transmis}}$

milieu | sortie vide  
 $I \rightarrow$  |  
 $r^2 I \leftarrow$  |  $I_S \rightarrow$   
 (réfléchi)

$\rightarrow I_S = I(1 - r^2) = 6,5(1 - 0,545^2) = 4,57 \text{ mW}$

II 1. Le coeff d'amplification est α par définition.

Phénomène d'interférences : superposition de l'onde se réfléchissant sur la face et de l'onde retour ayant parcouru 2D

Interférences constructives si les 2 ondes sont en phase  $\Rightarrow$  P max.

Comme  $\alpha = \frac{\alpha_m}{1 + \frac{I}{I_0}}$ , à I max correspond α ↓

2.a.  $\left| \begin{array}{c} \text{vide} \\ D \end{array} \right|$ . Pour être en phase, il faut que  $2D = p\lambda$  entier  
 Comme le milieu est le vide,  $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$   
 d'où  $\boxed{\nu = p \frac{c}{2D}}$  p entier

La différence  $\delta \nu$  correspond à 2 valeurs successives de p  $\rightarrow \boxed{\delta \nu = \frac{c}{2D}}$

b. On observe 1 nouveau max à chaque  $\delta \nu$  supplémentaire  
 Comme la rampe est imposée à  $\Delta \nu_p$ , on observera  $N_D$  max,  $\boxed{\Delta \nu_p = N_D \delta \nu}$

$\rightarrow \boxed{N_D = \Delta \nu_p \frac{2D}{c}}$

c. AN  $\frac{D}{c} = \frac{c N_D}{2 \Delta \nu_p} = \frac{3 \cdot 10^8 \times N_D}{2 \times 50 \times 10^9} = 3 \cdot 10^{-3} N_D$  soit  $\boxed{D_{\text{en mm}} = 3 N_D}$   
 Précis à 1 comptage près, donc à 3mm près

3. L'accord de phase correspond à  $\nu_p = p \frac{c}{2D}$  entier (cf II 2.a)

ici  $\nu$  est fixe, l'accord de phase correspond donc à  $D = p \frac{c}{2\nu_p}$  entier



→ 2 max sont séparés de  $dD = \frac{c}{2\nu_p}$  (3)  
 $D = D_0 + \nu t$  →  $dD = \nu dt$   
 $\nu$  constant } → 2 max de puissance sont séparés de  $\nu dt = \frac{c}{2\nu_p}$

→ donc pendant  $\Delta t$  on aura  $N_\nu = \frac{\Delta t}{dt} = \frac{\Delta t}{c} \frac{2\nu_p \nu}{1}$

$$N_\nu = \frac{\Delta t}{c} \frac{2\nu_p \nu}{1}$$

$$\rightarrow \nu = \frac{c}{2\nu_p \Delta t} N_\nu = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 845 \cdot 10^{-9}}{2 \times 3 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} N_\nu = 21 \cdot 10^{-6} N_\nu$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$\nu$  mesurable à  $N_\nu = 1$  près, soit à  $21 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  près

→ vitesse déterminée à  $21 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  près : performant.

II.4. on a tjs accord de phase quand  $\nu = p \frac{c}{2D}$  (cf II.2.a)

De  $t=0$  à  $\frac{T}{2}$  la fréquence varie de  $\nu_p$  à  $\nu_p + \Delta\nu_p$  et  $D$  varie de  $D$  à  $D + \nu \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \phi_{t=0} = \frac{2D\nu_p}{c} p \quad \text{et} \quad \phi_{t=\frac{T}{2}} = \frac{2(D+\nu\frac{T}{2})(\nu_p+\Delta\nu_p)}{c} p$$

La différence d'ordre correspond au nb de max observés  $N_1 = \frac{2}{c} \left( (D+\nu\frac{T}{2})(\nu_p+\Delta\nu_p) - D\nu_p \right)$

De  $\frac{T}{2}$  à  $T$ , la fréquence est revenue à  $\nu_p$  et  $D$  est devenue  $D + \nu T$

$$\Rightarrow \phi_{t=T} = \frac{2(D+\nu T)\nu_p}{c} p \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{2}{c} \left( (D+\nu T)\nu_p - (D+\nu\frac{T}{2})(\nu_p+\Delta\nu_p) \right)$$

on cherche  $D$  et  $\nu$ ; on a 2 eq<sup>ns</sup> à 2 inconnues

$$\text{rq : ajouter} \rightarrow N_1 + N_2 = \frac{2\nu T}{c} \nu_p \quad (1)$$

$$\text{retrancher} \rightarrow N_1 - N_2 = \frac{2}{c} \left( (2D+\nu T)(\nu_p+\Delta\nu_p) - 2D\nu_p - \nu T\nu_p \right)$$

$$= \frac{2}{c} \left( 2D\Delta\nu_p + \nu T\Delta\nu_p \right) \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow \nu = \frac{c}{2} \frac{(N_1 + N_2)}{T\nu_p} = \frac{\lambda_p (N_1 + N_2)}{2T} \quad (\lambda_p \text{ dans le vide})$$

$$(2) \rightarrow D = \left[ \frac{c}{2} (N_1 - N_2) - \frac{\lambda_p (N_1 + N_2) \Delta\nu_p}{2} \right] \frac{1}{2\Delta\nu_p} = \frac{c}{4} \frac{N_1 - N_2}{\Delta\nu_p} - \frac{\lambda_p (N_1 + N_2)}{4}$$

III 1, revoir question I.1. en remplaçant  $n$  par 1 / 1 par  $n$  }  $\Rightarrow \left[ r' = \frac{1-n}{1+n} \right] \left[ t' = \frac{2}{1+n} \right]$

$$\text{Ainsi } r+r'=0 \quad \text{et} \quad r^2+t^2 = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 + \frac{4n}{(n+1)^2} = \frac{n^2-2n+1+4n}{(n+1)^2} = 1$$

2. a. On applique la continuité de l'amplitude du champ  $E$  de part et d'autre de (2)

$$1 + z = t_2 + \frac{1}{2} e^{ik_2 D} \quad (3)$$

(soit incid + réfléchi = trans + trans. à travers (2) puis réfléchi par l'obstacle) ce qui fait un aller-retour 2D



Continuité de B (pas de charges ni de courant sur la face ②) (4)  
 $n(1-Z) = t_z - t_z \rho e^{2ikD}$  (4) par analogie avec l'expression de continuité de B en I.1).

Diviser  
 (3) et (4)  $\Rightarrow \frac{1+Z}{(1-Z)n} = \frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}$   
 diviser par  $n+1$  sachant  $r = \frac{n-1}{n+1}$

Isoler Z  $\Rightarrow \boxed{Z = \frac{(n-1) + (n+1)\rho e^{i\theta}}{(n+1) + (n-1)\rho e^{i\theta}} = \frac{n + \rho e^{i\theta}}{1 + r\rho e^{i\theta}}}$

III 2. b rappel énoncé  $\rho \ll 1$  : d.l. ordre 1  $Z \approx r(1 + \frac{\rho}{n} e^{i\theta})(1 - r\rho e^{i\theta}) \approx r(1 - r\rho e^{i\theta} + \frac{\rho}{n} e^{i\theta} - \rho^2 \frac{r}{n})$   
 $\rightarrow \boxed{Z \approx r(1 - r\rho e^{i\theta} + \frac{\rho}{n} e^{i\theta})} = r(1 + \rho e^{i\theta} (\frac{1}{n} - r)) = r(1 + a e^{i\theta})$  terme d'ordre 2 néglige

3. a. cf I 3. b la condition laser correspondait à  $r^2 e^{ikn_c 2L} = 1$  quand le coefficient de réflexion sur ① est  $r$ , c'est quand il n'y a pas d'onde retour / obstacle. Maintenant il y a l'onde retour sur l'obstacle et le coefficient de réflexion est devenu  $Z$ , il suffit ainsi de remplacer  $r$  par  $Z$ .

Mais attention, 1 seule fois car  $r^2$  provient de 2 réflexions :  
 celle sur la face ① dont le coeff de réflexion reste  $r$   
 celle sur la face ② dont le coeff de réflexion est devenu  $Z$

$\rightarrow \boxed{rZ e^{ikn_c 2L} = 1}$

b.  $\alpha \approx k_g$  et  $n_c \approx n - i\gamma \rightarrow rZ e^{ikn_c 2L} = 1$   
 $\rightarrow r^2 (1 + a e^{i\theta}) e^{ikn_c 2L} = 1$

prendre le module pour se débarrasser de  $e^{ikn_c 2L} \rightarrow r^2 e^{2\alpha L} [(1 + a \cos \theta) + i a \sin \theta]^2 = 1$

$\alpha \ll 1$   $\rightarrow r^2 e^{2\alpha L} (1 + 2a \cos \theta)^2 = 1$   
 $a$  néglige

d.l. ordre 1  $\rightarrow r^2 e^{2\alpha L} (1 + a \cos \theta) \approx 1 \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2L} \ln[r^2 (1 + a \cos \theta)]}$

c.  $\ln[r^2 (1 + a \cos \theta)] = 2 \ln r + \ln(1 + a \cos \theta) \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\ln r}{L} - \frac{a \cos \theta}{2L}}$  d.l. ordre 1 en  $a$  terminé

cf I 4. b  $\alpha_0 = -\frac{\ln r}{L} \rightarrow \boxed{\alpha = \alpha_0 - \frac{a \cos \theta}{2L}}$

$\theta = 0 \rightarrow \alpha = \alpha_0 - \frac{a}{2L}$   
 $\theta = \pi \rightarrow \alpha = \alpha_0 + \frac{a}{2L}$   
 $\rightarrow \boxed{\Delta \alpha = \frac{a}{L} \rightarrow \frac{\Delta \alpha}{\alpha_0} = \frac{\frac{a}{L}}{-\frac{\ln r}{L}} = -\frac{a}{\ln r}}$

AN:  $\Delta \alpha = -\frac{1,29 \cdot 10^{-3}}{\ln 0,545} = 2,1 \cdot 10^{-3}$  avec  $\alpha \approx \rho(\frac{1}{n} - r) = 10^{-3} \cdot 1,29$   
 $n = 3,4 \Rightarrow r = \frac{n-1}{n+1} = 0,545$

III 4. a. reprendre la def de  $\alpha = \frac{\alpha_m}{1 + \frac{I}{I_0}} \rightarrow I = I_0 \left( \frac{\alpha_m}{\alpha} - 1 \right)$

$\alpha(\theta)$  donc I varie avec  $\theta$

$I_{max}$  pour  $\alpha$  min, c'ad  $\theta = 0 (2\pi) \rightarrow I_{max} = I_0 \left[ \frac{\alpha_m}{\alpha_0 - \frac{a}{2L}} - 1 \right]$

$I_{min}$  pour  $\alpha$  max, c'ad  $\theta = \pi \rightarrow I_{min} = I_0 \left[ \frac{\alpha_m}{\alpha_0 + \frac{a}{2L}} - 1 \right]$

$\theta \equiv 2kD$  donc I max pour  $2kD = 2m\pi$  m entier

$h = h_{vide}$   
(cf 32)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} v \Rightarrow \left[ v = \frac{hc}{2\pi} = \frac{m\pi c}{D 2\pi} = \frac{m c}{2D} \right]$  m entier fréquence d'émission pour obtenir I max

$I \approx I_{moyenne} = I_0 \left[ \frac{\alpha_m}{\alpha_0} - 1 \right]$

$\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{moy}} = \frac{\frac{\alpha_m}{\alpha_0 - \frac{a}{2L}} - \frac{\alpha_m}{\alpha_0 + \frac{a}{2L}}}{\frac{\alpha_m}{\alpha_0} - 1} = \frac{a \alpha_m}{L \left( \frac{\alpha_m - \alpha_0}{\alpha_0} \right) \left( \alpha_0^2 - \frac{a^2}{4L^2} \right)} \approx \frac{a \alpha_m}{L (\alpha_m - \alpha_0) \alpha_0}$

A.N :  $\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{moy}} = \frac{1,29 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^{-3} (2 \cdot 10^3 - 1210) 1210} = 5,4 \cdot 10^{-3}$

IV 1.

$r^2 (1 + a e^{i\theta}) e^{i k n_c 2L} = 1 \Rightarrow r^2 (1 + a e^{i\theta}) e^{i k n_c 2L} e^{k g 2L} = 1$   
 $n_c \approx n - i g$

le module doit être égal à 1 mais aussi  $(1 + a e^{i\theta}) e^{i k n_c 2L} = \frac{c t_i}{r e^{i 2 p \pi}}$

$1 + a e^{i\theta} = 1 + a \cos \theta + i a \sin \theta = c t_i e^{i \varphi}$  avec  $\left[ \tan \varphi = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta} \right]$  et  $\cos \varphi > 0$   
 $\cos \varphi < 1$

$\rightarrow c t_i e^{i \varphi} e^{i k n_c 2L} = c t_i e^{i 2 p \pi}$  p entier

$\rightarrow \varphi + k n_c 2L = 2 p \pi \Rightarrow \varphi + \frac{n L}{D} \theta = 2 p \pi$

Def  $\theta = 2kD$

$\Rightarrow \left[ \frac{n L}{D} \theta + a \sin \theta = 2 p \pi \right]$  p entier

$a \ll 1 \Rightarrow \tan \varphi \ll 1 \Rightarrow \tan \varphi \approx \varphi = \frac{a \sin \theta}{1}$

2. a. Eventuelle modification de n, g et h

$\alpha = h g$  III 2. c  $\alpha = \alpha_0 - \frac{a \cos \theta}{2L}$  avec  $\alpha_0 = -\frac{h n r}{L} \rightarrow \alpha - \alpha_0 = -\frac{a \cos \theta}{2L}$

$\rightarrow \delta \alpha \approx \alpha - \alpha_0 = \delta(h g) = g_0 \delta h + h_0 \delta g = -\frac{a \cos \theta}{2L}$

b.

$\frac{n L \theta}{D} + a \sin \theta = 2 p \pi$   
 $\theta = 2kD$   
 $\left. \begin{aligned} \Rightarrow 2nLk + a \sin \theta &= 2p\pi \\ 2n_0 L k_0 + a \sin \theta &= 2p\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ 2L \delta(k n) = -a \sin \theta \right]$   
ou  $\left[ n_0 \delta k + k_0 \delta n = -\frac{a \sin \theta}{2L} \right]$   
nul quant D=0

IV 2. c. dif:  $\delta n = \beta \delta g$  avec  $\beta > 0$   $\beta = 99$  unités  $\Rightarrow \beta g_0 \ll n_0$  (6)

$g_0 \ll 1$

reprenons IV.2.a  
IV.2.b.

$$\left. \begin{aligned} g_0 \delta h + h_0 \delta g &= -\frac{a}{2L} \cos \theta \\ n_0 \delta h + h_0 \delta n &= -\frac{a}{2L} \sin \theta \\ \delta n &= \beta \delta g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta h = -\frac{a}{2L} \frac{\beta \cos \theta - \sin \theta}{g_0 \beta - n_0}$$

$$= -\frac{a}{2L} \frac{\beta g_0 \cos \theta - g_0 \sin \theta}{\text{négligeable}}$$

$$\delta h = \frac{a}{2L} (\beta \cos \theta - \sin \theta)$$

3.  $h = h_0 + \delta h$   
 $\theta \approx 2h$   
 (J.3.b)  $\rightarrow h_0 n_0 L = p\pi$   
 $\beta \approx \tan \varphi$   
 cf. précédente IV.2.c

$$\delta h = \frac{a}{2L n_0} [\tan \varphi \cos \theta - \sin \theta] = \frac{a}{2L n_0 \cos \varphi} [\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta]$$

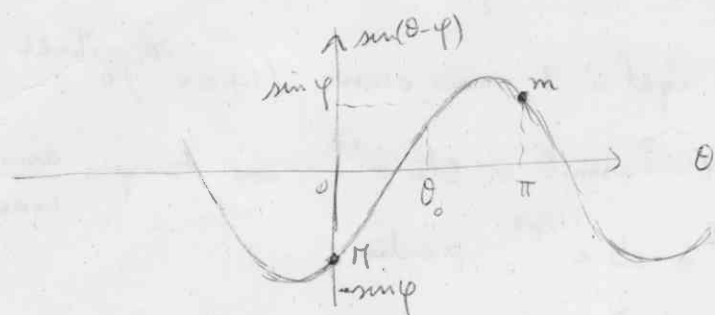
$$= -\frac{a}{2L n_0 \cos \varphi} \sin(\theta - \varphi)$$

$$\frac{\theta}{2D} = \frac{p\pi}{n_0 L} - \frac{a}{2L n_0 \cos \varphi} \sin(\theta - \varphi)$$

$$\frac{2L n_0 \cos \varphi}{a} \rightarrow \frac{2p\pi \cos \varphi}{a} - \frac{n_0 L \cos \varphi}{a D} \theta = \sin(\theta - \varphi) \Rightarrow A = \frac{2p\pi \cos \varphi}{a} \quad B = \frac{n_0 L \cos \varphi}{a D}$$

AN  $\beta = 6 \rightarrow \varphi \approx \text{Arctan } \beta = 1,406 \text{ rad}$

4

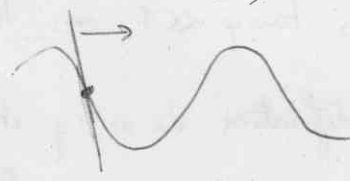


f III 4.6 les max pour  $\theta = 0$   
min  $\theta = \pi$

5. a  $D \uparrow$  alors  $B \downarrow$  mais on néglige sa variation  
 et  $\theta_0 = 2h_0 D \uparrow$

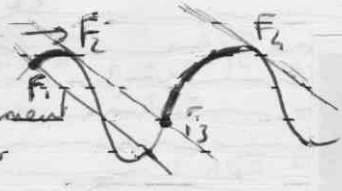
A-BD est une droite qui s'annule en  $\theta_0$ ; elle se translate à droite

si  $B > 1$  la pente est forte  
 1 seul pt de fonctionnement  
 donc la localisation varie  
 continuellement



si  $B < 1$  la pente est faible

Interprétation: on passe du pt de fonctionnement  $F_1$  à  $F_2$  continuellement puis saut en  $F_3$  puis de  $F_3$  en  $F_4$  continuellement.



IV 5) b)

f 19 en IV 4.

les max sont en bas de la  $\phi$   
les min sont en haut

(7)

les sauts s'effectuent de  $F_2$  à  $F_3$  donc du haut vers le bas de la  $\phi$  donc l'amplitude  $\nearrow$  au cours d'un saut

c) C'est l'observation inverse

Résumé des parties I et II

Dans ce sujet les oem ont pour notation complexe  $e^{i(kz - \omega t)}$  pour l'onde se propageant vers les  $z \nearrow$ .

Pour décrire l'amplification de l'oem dans la cavité laser, le sujet introduit un indice complexe dont la partie imaginaire  $-g$  est négative (ainsi  $e^{ikz} = e^{i\frac{\omega}{c}z}$  contient  $e^{\frac{g\omega}{c}z}$  croissant avec  $z$ )

La condition laser est la réalisation d'une amplitude constante. Celle-ci est vérifiée pour des valeurs discrètes de fréquence (valeurs dépendant de la largeur de la cavité et de l'indice  $n$  lié à la propagation) et séparées d'environ  $10^{11}$  Hz.

La diode laser peut être utilisée pour la mesure de position et de vitesse d'un obstacle. Le principe en est la détection de maxima éventuels issus des interférences constructives (superposition d'ondes en phase) entre l'onde laser (fonctionnant dans la condition laser) et l'onde émise puis réfléchie par l'obstacle.

Il se trouve que le courant d'alimentation de la diode laser modifie l'indice de la cavité, donc les valeurs de fréquence de fonctionnement en amplitude constante (condition laser).

En agissant sur ce courant d'alimentation on obtient une rampe en fréquence ; alors on peut observer les interférences constructives un certain nombre de fois pour des fréquences correspondant à une longueur de trajet entre la diode laser et l'obstacle égal à un nombre entier de demi-longueurs d'onde (aller-retour = nombre entier de  $\lambda$ )