

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2016

FILIÈRE PC

## COMPOSITION DE PHYSIQUE – B – (XEULC)

(Durée : 4 heures)

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*

*Les résultats des applications numériques seront donnés avec un chiffre significatif.*

\* \* \*

## Histoires d'eau ou quelques aspects de la physique des gouttes

## Introduction.

- 10 Nous nous proposons d'étudier deux aspects de la physique des gouttes d'eau. L'un concerne l'effet mécanique de la pluie sur un pare-brise d'avion et fait l'objet de la première partie. L'autre se rapporte à la déstabilisation d'un filet d'eau conduisant à la formation d'un chapelet de gouttelettes et constitue la seconde partie. Ces deux parties sont indépendantes.

## Notation et données.

$$\begin{aligned}
 \text{Accélération de la pesanteur : } g &= 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\
 \text{Masse volumique de l'air : } \rho_a &= 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\
 \text{Masse volumique de l'eau : } \rho_e &= 998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\
 \text{Viscosité dynamique de l'air : } \eta_a &= 1,85 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\
 \text{Tension superficielle eau/air : } \gamma &= 72,8 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Le signe "≡" est une égalité introduisant et définissant une grandeur.

Intégrale généralisée :

$$J_n \equiv \int_0^{+\infty} x^n \exp(-x) dx = n! \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

Élément de longueur d'une courbe définie par une fonction  $y = y(x)$  :

$$ds \equiv \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \tag{3}$$

## 15 I Impact mécanique de la pluie.

Nous nous proposons d'étudier l'effet mécanique de la pluie sur un pare-brise. Une goutte est assimilée à une sphère de rayon  $r$ . Sa vitesse, par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_0(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  considéré comme galiléen, est notée  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  où  $\vec{e}_x = \vec{g}/g$ .

- 20 Le coefficient de traînée d'un objet sphérique, dans un écoulement en régime inertiel, est sensiblement constant. Nous adoptons la valeur  $C_x = 0,4$ .

### I.A Chute d'une goutte d'eau.

1. a) Sur la base de sa propre expérience, proposer un ordre de grandeur du rayon d'une goutte d'eau de pluie et celui de sa vitesse de chute.
- b) Calculer le nombre de Reynolds correspondant. En déduire la nature du régime de l'écoulement de l'air autour de la goutte.  
Nous considérerons que l'écoulement demeure dans ce régime durant toute la chute d'une goutte.
- c) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur une goutte, lors de sa chute. Préciser leur expression.
- d) Établir que la vitesse de chute de la goutte est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{\dot{v}}{g} = 1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2, \quad (4)$$

où  $u$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\rho_e/\rho_a$ ,  $g$ ,  $r$  et  $C_x$ , et dont on donnera une interprétation physique.

2. a) Déterminer la solution de l'équation différentielle (4) en considérant que la goutte quitte le nuage avec une vitesse négligeable devant  $u$ .
- b) Esquisser l'allure de l'évolution  $v/u = f(t/t^*)$  où  $t^*$  représente un temps caractéristique que l'on précisera. Commenter brièvement cette évolution.
- c) À partir du tracé précédent, définir une distance caractéristique  $H^*$  au delà de laquelle on peut considérer que la goutte a atteint une vitesse limite.
- d) Calculer les valeurs numériques de  $u$  et  $H^*$ . Commenter brièvement ce dernier résultat.

### I.B Effort mécanique.

Nous souhaitons estimer la force qu'exerce la pluie sur le pare-brise d'un avion. Le pare-brise est modélisé par une surface  $S$  rectangulaire de hauteur  $h = 0,5$  m et de largeur  $\ell = 1$  m, inclinée d'un angle  $\alpha = 45^\circ$  sur la direction horizontale (figure (1)). Nous considérerons que, lorsque qu'une goutte heurte le pare-brise, sa quantité de mouvement, relativement à un repère lié à l'avion, s'annule.

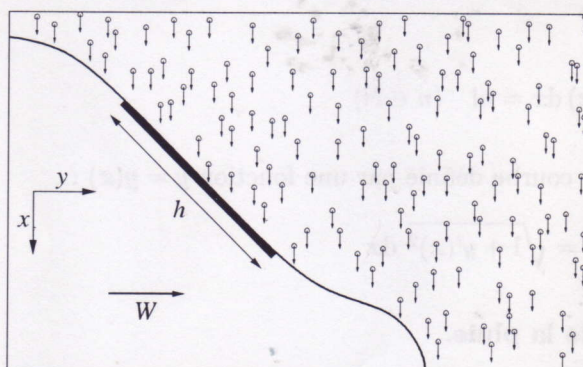


FIGURE 1 – Schéma de profil du nez d'un avion progressant, sous la pluie, à la vitesse  $\vec{W} = W \vec{e}_y$ . Le pare-brise apparaît en trait plein épais.

L'intensité  $I$  caractérisant une précipitation est mesurée par la hauteur d'eau recueillie au sol, par unité de temps. Pour les applications numériques, nous adopterons  $I = 300 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$  (pluie extrême, sur une courte durée).

Dans un premier temps, nous supposons que les gouttes de pluie ont le même rayon  $r_0 = 0,5$  mm. Nous notons  $N_0$  leur nombre par unité de volume (d'atmosphère).

3. a) Exprimer  $N_0$  en fonction de  $u$ ,  $r_0$  et de l'intensité  $I$ .  
 b) Calculer la valeur numérique de  $N_0$ .  
 c) En déduire la distance moyenne  $d_0$  entre les gouttes de pluie.
4. Nous considérons d'abord le cas d'un avion immobile sur l'aérodrome.  
 a) Représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .  
 b) Exprimer la force  $\vec{F}_0$  exercée par la pluie sur le pare-brise. Vérifier que son module s'écrit sous la forme :

$$F_0 = (k \cos \alpha) S \rho_e u^2. \quad (5)$$

Expliciter la dépendance du facteur  $k$  avec  $N_0$  et  $r_0$ . Préciser sa dimension.

- c) Calculer l'intensité de cette force.
5. Nous considérons maintenant un avion volant à la vitesse  $\vec{W} = W \vec{e}_y$ .  
 a) Donner un ordre de grandeur de  $W$  pour un avion de ligne.  
 b) En se plaçant dans un repère lié à l'avion, représenter, sur un schéma, le domaine de précipitation (atmosphère et gouttes) intercepté par le pare-brise, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . On considérera les ordres de grandeur en jeu.  
 c) En déduire l'expression de la force  $\vec{F}$  exercée par la pluie sur le pare-brise.  
 d) Donner l'ordre de grandeur de la force correspondante.

### I.C Distribution du rayon des gouttes.

En réalité, les gouttes de pluie n'ont pas toutes la même taille. Le nombre  $dN$  de gouttes, par unité de volume (atmosphérique), dont le rayon est compris entre  $r$  et  $r + dr$  suit sensiblement la loi de Marshall-Palmer :

$$dN = n(r) dr = n_0 \exp(-r/\lambda) dr, \quad (6)$$

où  $n_0$  et  $\lambda$  sont les paramètres (constants) de la distribution.

La différentielle  $dP(r) \equiv dN/N_0$ , où  $N_0$  représente le nombre total de gouttes par unité de volume, s'interprète comme la probabilité élémentaire que le rayon d'une goutte appartienne à l'intervalle  $[r, r + dr]$ .

6. Quelques propriétés de la distribution de rayon.

- a) Exprimer  $N_0$  en fonction de  $n_0$  et  $\lambda$ .  
 b) Comparer les probabilités  $\mathcal{P}(r \leq \lambda)$  et  $\mathcal{P}(r > \lambda)$  que le rayon d'une goutte choisie aléatoirement soit, respectivement, inférieur ou supérieur à  $\lambda$ . Interpréter ce résultat.  
 c) Exprimer le rayon moyen  $\langle r \rangle$  des gouttes. Mettre ce résultat en perspective du précédent.

7. Nous définissons la grandeur différentielle suivante :

$$dM(r) = \rho_e \frac{4\pi}{3} r^3 n(r) dr. \quad (7)$$

- a) Donner sa signification physique.  
 b) Esquisser l'allure graphique de la grandeur  $\mu(r) \equiv dM/dr$ .  
 c) Préciser le rayon des gouttes dont la contribution à la masse totale (par unité de volume) est la plus importante.  
 d) Exprimer la masse moyenne  $\langle m \rangle$  des gouttes.

e) Commenter la comparaison de  $\langle m \rangle$  à la masse d'une goutte de rayon  $\langle r \rangle$ .

8. L'expression de la force obtenue à la question (5c) s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} = -Q N_0 r_0^3 \vec{e}_y, \quad (8)$$

où le facteur  $Q$  est indépendant de  $N_0$  et  $r_0$ .

a) Exprimer la force  $\vec{F}_D$  exercée par la pluie sur le pare-brise, pour la distribution (6).

b) Exprimer le rapport  $\varphi \equiv \left| \vec{F}_D \right| / \left| \vec{F} \right|$  pour un nombre total  $N_0$  de gouttes par unité de volume fixé et pour  $\langle r \rangle = r_0$ .

c) Conclure sur l'effet mécanique de la pluie. Le comparer à celui correspondant au maintien en pression de l'habitacle de l'avion.

9. La figure (2) présente des relevés météorologiques de la distribution du rayon des gouttes.

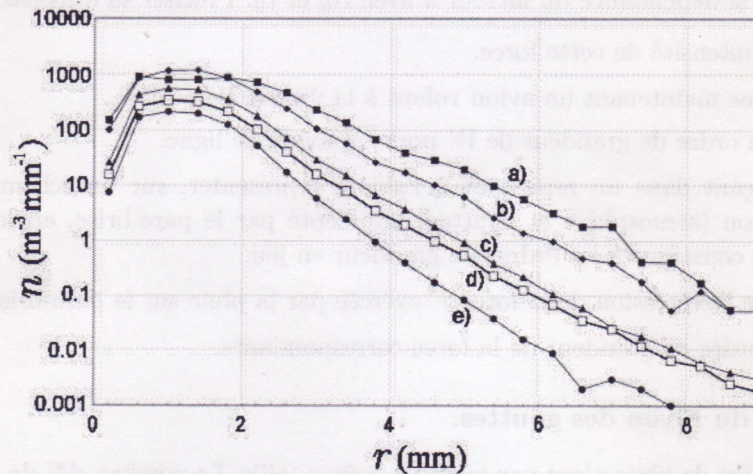


FIGURE 2 – Relevés météorologiques de la distribution du rayon des gouttes de pluie, pour cinq régimes de précipitation. On remarquera l'échelle logarithmique en ordonnée.

a) Comparer ces données à leur modélisation par la loi de Marshall-Palmer (6).

b) Pour le plus faible régime de précipitation, que l'on désignera en justifiant sa sélection, déduire de la figure (2) les valeurs (approximatives) de  $n_0$  et de  $\lambda$ .

c) Dans ce même régime, donner la valeur numérique du rayon moyen  $\langle r \rangle$  et celle du nombre total  $N_0$  de gouttes par unité de volume. Commenter ce dernier résultat.

d) Parmi les relations exprimant le nombre total de gouttes  $N_0$  par unité de volume, leur rayon moyen  $\langle r \rangle$  et la force  $\vec{F}$  exercée sur le pare-brise, obtenues en s'appuyant sur la loi de Marshall-Palmer (6), quelle est celle qui souffre le moins de l'écart de cette loi aux relevés météorologiques? Cette réponse doit être argumentée.

## II Formation des gouttes - Instabilité de Rayleigh-Plateau.

Dans cette partie, nous allons étudier la déstabilisation d'un filet d'eau. Initialement cylindrique, on observe qu'il se fragmente en un chapelet de gouttes<sup>1</sup>. Le moteur de cette instabilité, dite de Rayleigh-Plateau, est la tension superficielle (énergie de surface). On rappelle que la variation de l'aire  $\Delta S$  d'une interface eau/air entraîne une variation d'énergie  $\Delta E$  de cette interface telle que :

$$\Delta E = \gamma \Delta S. \quad (9)$$

Nous choisissons d'associer une énergie nulle à une aire nulle.

1. On observe un phénomène analogue de fragmentation lorsqu'un filet d'eau s'écoule sur une vitre ou lorsque la rosée forme des perles sur une toile d'araignée.

## II.A Approche statique.

Dans un premier temps, nous négligeons l'effet de la gravité.

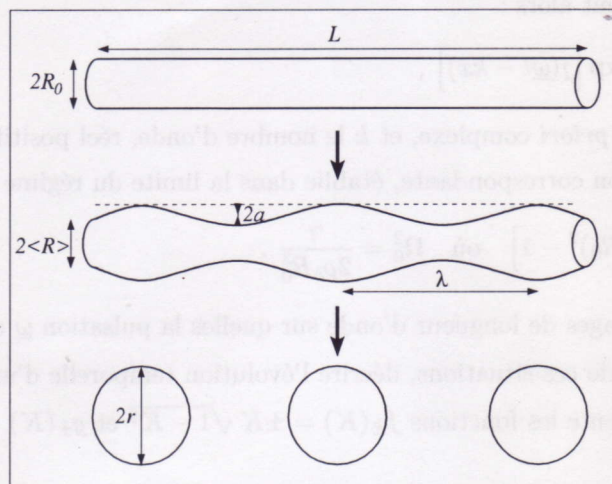


FIGURE 3 – Schémas du filet d'eau cylindrique initial ( $R_0 \ll L$ ), puis de la perturbation sinusoïdale et enfin de l'état final en chapelet de gouttes sphériques.

- 100 10. a) Considérons une portion de longueur  $L$  d'un cylindre d'eau, de rayon  $R_0$  ( $R_0 \ll L$ ), dans l'air (voir figure (3)). Exprimer l'énergie de surface  $E_0$  du cylindre en fonction de  $\gamma$ ,  $R_0$  et  $L$ .
- b) Après sa déstabilisation, le cylindre a formé  $N$  gouttes sphériques de rayon  $r$  (figure (3)). Exprimer l'énergie de surface  $E_N$  de l'ensemble de ces gouttes, en fonction de  $\gamma$ ,  $N$  et  $r$ .
- 105 c) À quelle condition, portant sur  $r$ , la situation en chapelet est-elle énergétiquement la plus favorable? Analyser ce résultat.
11. Si l'approche précédente permet de justifier qu'une instabilité est susceptible d'apparaître, elle ne décrit toutefois pas l'évolution continue conduisant du filet d'eau ( $R_0, L$ ) au chapelet de gouttelettes ( $N, r$ ). Nous considérons alors que le rayon  $R$  du filet d'eau est modulé harmoniquement autour de sa valeur moyenne  $\langle R \rangle$  (voir figure (3)) :

$$R(x) = \langle R \rangle + a \sin(kx), \quad (10)$$

où  $x$  est l'abscisse le long de l'axe de symétrie,  $a$  l'amplitude et  $k = 2\pi/\lambda$  le nombre d'onde de la perturbation ( $kL \gg 1$ ). Nous supposons de plus que cette perturbation est faible, soit  $a \ll R_0$  et  $ka \ll 1$ .

- 110 a) Établir la relation liant  $a$ ,  $\langle R \rangle$  et  $R_0$ . Exprimer  $\langle R \rangle$  en fonction de  $R_0$ , à l'ordre le plus bas en  $a/R_0$ .
- b) À l'ordre le plus bas en  $a/R_0$  et en  $ka$ , ~~établir~~ <sup>on montre</sup> que l'aire latérale du filet déformé, relative à une longueur d'onde, s'exprime :

$$S_\lambda(a) = S_\lambda(0) \left[ 1 + \frac{a^2}{4R_0^2} (k^2 R_0^2 - 1) \right]. \quad (11)$$

- c) Analyser ce résultat.

## II.B Approche dynamique.

Afin de rendre compte de l'aspect dynamique de l'instabilité, nous allons maintenant étudier l'évolution temporelle d'une perturbation sinusoidale, de longueur d'onde fixée. L'équation décrivant la déformation du filet devient alors :

$$\underline{R}(x, t) = \langle R \rangle + a \exp [j(\underline{\omega}t - kx)] , \quad (12)$$

où  $\underline{\omega}$  est une grandeur, *a priori* complexe, et  $k$  le nombre d'onde, réel positif.

La relation de dispersion correspondante, établie dans la limite du régime non visqueux, s'écrit :

$$\underline{\omega}^2 = \Omega_0^2 (kR_0)^2 [(kR_0)^2 - 1] \quad \text{où} \quad \Omega_0^2 = \frac{\gamma}{2\rho_e R_0^3} . \quad (13)$$

- 115 12. a) Indiquer les plages de longueur d'onde sur lesquelles la pulsation  $\underline{\omega}$  est réelle, ou imaginaire.  
 b) Dans chacune de ces situations, décrire l'évolution temporelle d'une perturbation.
13. La figure (4) représente les fonctions  $f_{\pm}(K) = \pm K \sqrt{1 - K^2}$  et  $g_{\pm}(K) = \pm K \sqrt{K^2 - 1}$ .

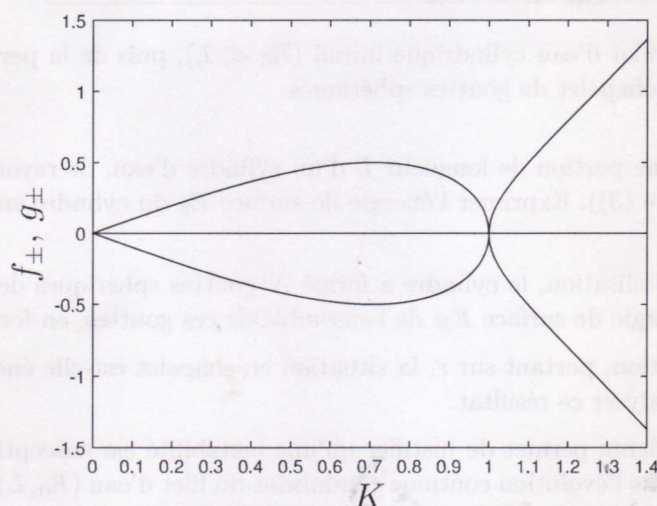


FIGURE 4 – Représentation graphique des fonctions  $f_{\pm}$  et  $g_{\pm}$ .

- a) Reproduire (approximativement) cette figure et y indiquer les deux domaines correspondant aux régimes décrits à la question précédente.
- 120 b) Situer, sur la figure reproduite, en le justifiant, l'abscisse  $K_c$  pour laquelle l'instabilité se développe le plus rapidement. Exprimer la constante de temps  $\tau_c$  qui lui est associée.
- c) Identifier les phénomènes moteur et frein en concurrence et à l'origine de ce temps caractéristique.
- d) Calculer les valeurs numériques de  $\lambda_c$  et de  $\tau_c$  pour un rayon  $R_0 = 1$  mm (on pourra lire les valeurs approchées sur le graphique).
- 125 e) Dans le cas d'une onde progressive, indiquer comment lire sur le graphique la vitesse de phase. Exprimer cette vitesse dans la limite  $K^2 \gg 1$ .

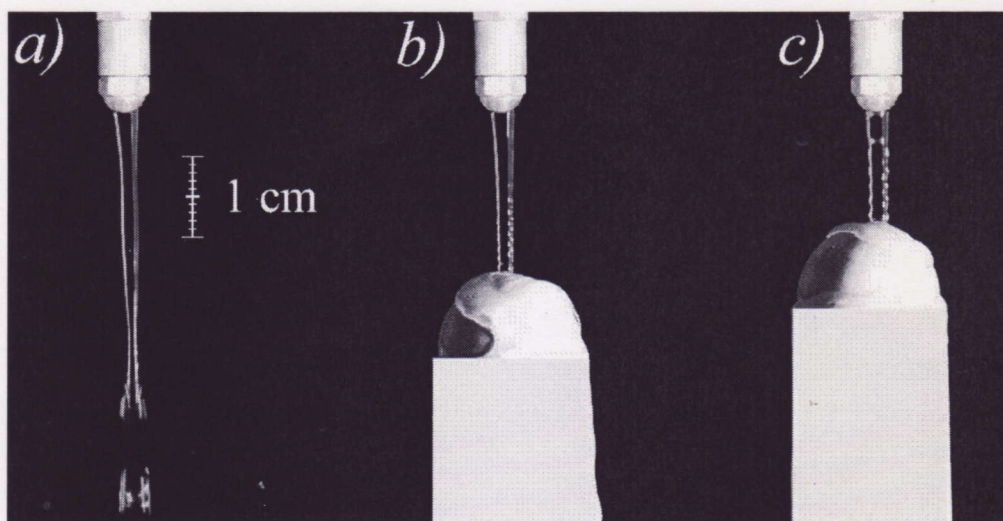


FIGURE 5 – Photographies d'un filet d'eau de débit  $Q = 2 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$ , à la sortie d'un tube de rayon  $R_0 = 1 \text{ mm}$ . a) Apparition de gouttes; b) et c) Chute sur un obstacle.

### II.C Instabilité d'un filet d'eau en chute libre.

Nous souhaitons étudier les comportements décrits précédemment sur un filet d'eau en chute libre (figure (5)). À la sortie d'un tube (de rayon  $R_0 = 1 \text{ mm}$ ), le filet d'eau est d'apparence cylindrique mais il présente toutefois de faibles perturbations de son rayon (non visibles sur les images).

Afin de simplifier cette étude, nous considérons, qu'en l'absence de perturbation, le champ de vitesse au sein du filet d'eau est uniforme, tant radialement que longitudinalement. Cette vitesse est notée  $U_0$ . Cela revient à négliger les effets visqueux ainsi que l'amincissement du filet dû à l'accélération de la pesanteur.

14. a) Estimer la valeur de la vitesse  $U_0$ .  
 b) En s'appuyant sur la photographie (5-a), remonter à un ordre de grandeur de l'amplitude  $a$  de la perturbation qui initie la déstabilisation du filet d'eau. On supposera qu'elle apparaît immédiatement en sortie du tube.
- 140 15. La photographie (5-b) illustre une situation différente où il apparaît une ondulation de la surface du filet (visible sur sa partie inférieure). Cette ondulation est causée par l'impact du filet sur un obstacle (une bille) qui perturbe son écoulement. Pour ce régime particulier, l'onde paraît figée (dans le référentiel du laboratoire).  
 a) Préciser dans quel régime,  $\omega$  réelle ou imaginaire, l'expérience se situe. Réponse à justifier.  
 145 b) Quelle information, sur la vitesse de phase, l'apparence figée de l'onde donne-t-elle ?  
 c) Mesurer, sur la photographie (5-b), la longueur d'onde sélectionnée et calculer le produit  $kR_0$ .  
 d) Calculer alors la vitesse de phase correspondante et la comparer à celle qui a été, par ailleurs, déjà calculée.  
 150 e) La photographie (5-c) montre l'onde de surface pour une autre position de l'obstacle. En révisant les hypothèses adoptées, expliquer pourquoi la longueur d'onde observée diffère de la précédente.  
 f) On constate que les ondes s'atténuent en s'éloignant de l'obstacle. Quelle pourrait en être l'origine physique ?

I1) a) Rayon goutte  $\sim 1 \text{ mm}$

Vitesse de chute  $\sim 1 \text{ m s}^{-1}$  (ça dépend de la force de la pluie)

I1) b)  $R_e = \frac{\rho_a v r}{\eta_a}$  ← viscosité dynamique de l'air

$R_e \sim \frac{1,2 \times 10^{-3} \times 10^{-3}}{1,85 \times 10^{-5}} \sim 100 \gg 1$

Le régime est turbulent

I1) c) Forces: Poids, Archimède négligeable car  $\rho_a \sim 10^{-3} \rho_e$ , et Viscosité

Je suis étonné qu'on exige la formule de  $F_{\text{viscosité}}$  avec  $C_x$ . Je sais seulement qu'elle est proportionnelle à  $v^2$  et à  $r^2$  et à  $\rho_a$  ce qu'on peut écrire  $F_{\text{viscosité}} = -\alpha C_x r^2 \rho_a v^2 \vec{e}_x$  ou traînée

qui est homogène à une force

Une recherche donne  $F_{\text{traînée}} = -0,5 C_x \pi r^2 \rho_a v^2 \vec{e}_x$

Poids  $\vec{P} = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_x$

Archimède  $\vec{\Pi} = -\rho_a \frac{4}{3} \pi r^3 g \vec{e}_x$

I1) d) avec  $m = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3$ , le PFD donne

$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{m \rho_a g}{\rho_e} - 0,5 C_x \pi r^2 \rho_a v^2$

soit  $\frac{v}{g} = 1 - \frac{\rho_a}{\rho_e} - \frac{0,5 C_x \pi r^2 \rho_a}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_e g} v^2$

Comme  $\rho_a \sim 10^{-3} \rho_e$  on peut dire  $\frac{\rho_a}{\rho_e} \ll 1$

d'où  $\frac{v}{g} \approx 1 - \frac{v^2}{\frac{8r}{3C_x} \frac{\rho_e g}{\rho_a}} = 1 - \frac{v^2}{u^2}$

avec  $u = \sqrt{\frac{8r}{3C_x} \frac{\rho_e g}{\rho_a}}$

Eq: quand  $\dot{v} = 0$  on a  $v = u$   
 $u$  est la vitesse limite atteinte

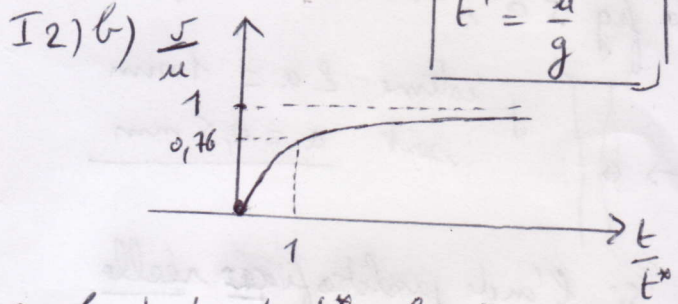
I2) a) Séparer les variables (équation non linéaire)

$\int \frac{dv}{1 - (\frac{v}{u})^2} = \int g dt$

$u \operatorname{Arctg}(\frac{v}{u}) = gt$  (cte nulle)

$v = u \operatorname{th}(\frac{gt}{u})$  ou  $\frac{v}{u} = \operatorname{th}(\frac{t}{t^*})$

$t^* = \frac{u}{g}$



Au bout de  $t = t^*$ , la vitesse a atteint les  $\frac{3}{4}$  de sa valeur limite.

I2) c) En prenant tout de suite la valeur limite, on peut construire une distance caractéristique  $H^* = ut^*$  qui est largement plus que le chemin parcouru jusqu'à  $t^*$

I2) d)  $u = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 998 \cdot 9,81}{3 \cdot 0,4 \cdot 1,20}} = 7 \text{ m s}^{-1}$   
 (dépendant du rayon  $r$  choisi, ici  $10^{-3} \text{ m}$ )

$H^* = ut^* = \frac{u^2}{g} \approx 5 \text{ m}$



13) a)  $u$ : vitesse limite

$$I = \frac{h'}{\Delta t} \text{ par section } \Delta S = 1 \text{ m}^2$$

Les gouttes tombées pendant  $\Delta t$  occupent le volume  $\Delta S u \Delta t$

Il y en avait donc  $N_0 \Delta S u \Delta t$

Cela donne un volume en eau de  $\frac{4}{3} \pi r_0^3 N_0 \Delta S u \Delta t$

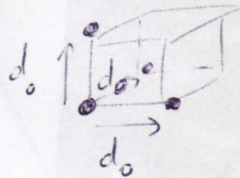
D'où  $h' \Delta S = \frac{4}{3} \pi r_0^3 N_0 \Delta S u \Delta t$

Ainsi  $I = \frac{h'}{\Delta t} = \frac{4}{3} \pi r_0^3 N_0 u$

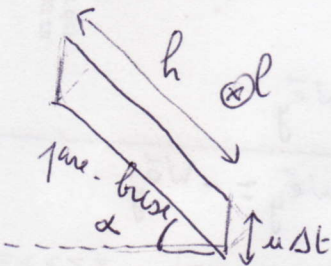
b) AN  $N_0 = \frac{3I}{4\pi r_0^3 u} = \frac{3 \cdot 300 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3600 \cdot 0,5^3 \cdot 10^{-9} \cdot 7} = 7,10^4 \text{ gouttes/m}^3$   
 ← dépend de la valeur de  $u$  qui prise à  $7 \text{ ms}^{-1}$

c)  $N_0 = \frac{1}{d_0^3}$  car dans un cube de côté  $d_0$ , on peut compter 1 goutte

$d_0 \approx 2 \text{ cm}$



14) a)



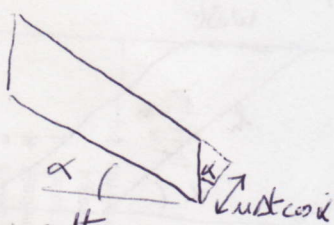
b)  $\Delta \vec{p}_1 = 0 - m u \vec{e}_x$   $m$ : masse d'1 goutte

Pendant  $\Delta t$  viennent se coller au pare-brise  $N_0 h l u \Delta t \cos \alpha$  gouttes

donc  $\Delta \vec{p} = -N_0 h l u \Delta t m \cos \alpha \vec{e}_x$

d'où  $\vec{F}_{\text{pare-brise sur gouttes}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -N_0 h l u^2 m \cos \alpha \vec{e}_x$

d'où  $\vec{F}_{\text{gouttes sur pare-brise}} = \text{l'opposé} = N_0 h l u^2 m \cos \alpha \vec{e}_x$



La masse d'1 goutte  $m = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3$

d'où  $\vec{F}_{\text{gouttes sur pare-brise}} = N_0 h l u^2 \rho_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3 \cos \alpha \vec{e}_x = k \cos \alpha S \rho_0 u^2 \vec{e}_x$

d'où  $k = N_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3$  sans dimension  $S = h l$

c) AN  $F_0 = 7,10^4 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,5^3 \cdot 10^{-9} \cos 45^\circ \cdot 0,5 \times 1,988 \cdot 7^2 = 0,6 \text{ N}$

depend de  $u$  ici à  $7 \text{ ms}^{-1}$   
 de  $N_0 \propto \frac{1}{u}$   
 donc  $F_0 \propto u$

I 5) a)  $W \sim 10^3 \text{ km/h}$  (un peu moins peut-être)  
 Vol Paris Nice  $\sim 1 \text{ h}$

I 5) b) On remarque que  $W \gg u$

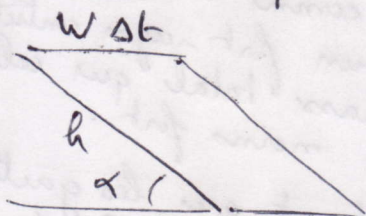
Ds ref' de l'air, les gouttes tombent à  $\vec{u}'$  (vitesse relative)

Ds ref' fixe, elles tombent à  $u \vec{e}_x$  (vitesse absolue)

$W \vec{e}_y$  est la vitesse d'entraînement

donc  $u \vec{e}_x = \vec{u}' + W \vec{e}_y$  soit  $\vec{u}' = u \vec{e}_x - W \vec{e}_y \approx -W \vec{e}_y$

Tout se passe, ds le ref' de l'air, comme si les gouttes arrivaient quasi horizontalement (selon  $\vec{e}_y$ )



I 5) c) Variation de quantité de mouvement d' (gouttes) :  $\Delta \vec{p}_i = \vec{0} - m \vec{u}'$

Nombre de gouttes interceptées pendant  $\Delta t$  :  $N_0 W \Delta t h \sin \alpha$

Variation de quantité de mouvement totale :  $\Delta \vec{p} = -N_0 W \Delta t h \sin \alpha \rho m \vec{u}'$

Avec  $\vec{u}' \approx -W \vec{e}_y$  cela fait approximativement  $\Delta \vec{p} = N_0 W^2 \Delta t h \sin \alpha \rho m \vec{e}_y$

PFD :  $\frac{\Delta \vec{p}_{gouttes}}{\Delta t} = \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gouttes}} = N_0 W^2 h \sin \alpha \rho m \vec{e}_y$

Principe des interactions :  $\boxed{\vec{F}_{\text{gouttes} \rightarrow \text{paroi}} = -\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gouttes}} = -N_0 W^2 h \sin \alpha \rho m \vec{e}_y}$

I 5) d)  $\|\vec{F}_{\text{gouttes} \rightarrow \text{paroi}}\| = N_0 W^2 h \sin \alpha \rho \left( \frac{4\pi}{3} r_0^3 \right)$

$F_{\text{gouttes} \rightarrow \text{paroi}} = 7 \cdot 10^4 \times \frac{10^{6 \times 2}}{(3600)^2} \times 0,5 \sin 45^\circ \times 1 \times 988 \times \frac{4\pi}{3} \cdot 0,5^3 \times 10^{-9} \approx 10^3 \text{ N}$

(dépend de la valeur de  $N_0$  donc de  $u$ )  
 $F_{\text{gouttes}} \propto u$  (ici  $7 \text{ ms}^{-1}$ )

$$I(6) a) dN = n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$N_0 = \int_0^{\infty} dN = n_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$N_0 = -\lambda n_0 \left[ e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]_0^{\infty} = \lambda n_0 \quad \boxed{N_0 = \lambda n_0}$$

$$I(6) b) P(r \leq \lambda) = \frac{N(r \leq \lambda)}{N_0} = \frac{n_0 \int_0^{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr}{n_0 \lambda}$$

$$\boxed{P(r \leq \lambda) = 1 - e^{-1} = 0,63}$$

$$\boxed{P(r \geq \lambda) = e^{-1} = 0,37}$$

(la somme est égale à 1)

La répartition est la suivante :

environ $\frac{2}{3}$	de gouttes de rayon $\leq \lambda$
$\frac{1}{3}$	$\geq \lambda$

$$I(6) c) \langle r \rangle = \int_0^{\infty} r \frac{dN}{N_0} = \int_0^{\infty} \frac{r}{\lambda} e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

lire notation et données  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$

donc  $\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = \lambda^2$  (après change de variable)

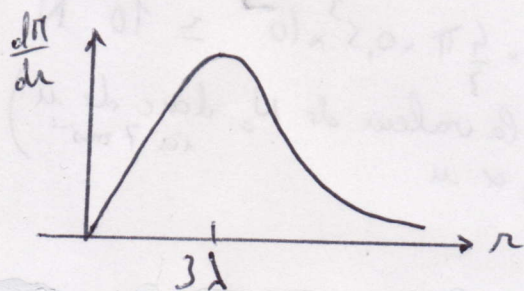
d'où  $\boxed{\langle r \rangle = \lambda}$

I(7) a)  $d\pi$  représente la masse des gouttes dont le rayon est entre  $r$  et  $r+dr$ .  $\pi$  occupant l'unité de volume  $d\pi \sim$  masse/volume

$$I(7) b) \mu(r) = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 n(r) = \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} n_0$$

$$\frac{d(r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}})}{dr} = \left( 3r^2 - \frac{r^3}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

annulation en  $r = 3\lambda$



I(7) c)  $r = 3\lambda$  pour lequel  $\mu(r)$  est max.

$$I(7) d) \langle m \rangle = \frac{\int_0^{\infty} d\pi}{N_0}$$

← masse de toutes les gouttes (tout rayon) occupant l'unité de volume

← nombre de ces gouttes occupant l'unité de volume

$$\int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = 6\lambda^4 \quad (\text{en posant } x = \frac{r}{\lambda})$$

$$\langle m \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \rho_e \frac{4}{3} \pi r^3 n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$$

$$= \rho_e \frac{4\pi}{3} n_0 6\lambda^4 = 8\rho_e \pi \lambda^3$$

$$\boxed{\langle m \rangle = 8\pi \rho_e \lambda^3}$$
 homogène à une masse

I(7) e) La masse d'une goutte de rayon moyen  $\langle r \rangle$  serait  $\rho_e \frac{4}{3} \pi \langle r \rangle^3$

Or  $\langle r \rangle = \lambda$  (I(6c))

d'où la masse d'une goutte  $\langle m \rangle = \frac{4}{3} \pi \rho_e \lambda^3$

Ce qui est inférieur à la masse moyenne des gouttes. Cela doit provenir du fait que la masse d'une sphère varie comme le cube du rayon. Les gouttes ayant un fort rayon contribuent davantage à la masse totale que celles qui ont un rayon moins fort.

I(8) a) Si on admet que les gouttes agissent avec  $\vec{F} = -Q N_0 \lambda_0^3 \vec{e}_y$  alors qu'elles ont toutes le même rayon  $\lambda_0$  et qu'il y en a  $N_0$  par unité de volume, alors on peut penser que de façon similaire, la force exercée par les gouttes dont le rayon est entre  $r$  et  $r+dr$  en nombre  $dN$  par unité de volume est  $d\vec{F} = -Q dN r^3 \vec{e}_y$

et que la force par toutes les gouttes de tout rayon sera

$$\vec{F}_D = \int_0^{\infty} d\vec{F}$$

Calcul:  $\vec{F}_D = \int_0^{\infty} -Q n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr r^3 \vec{e}_y$

or  $\int_0^{\infty} r^3 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr = 6\lambda^4$  (cf I(7d))

d'où  $\vec{F}_D = -Q n_0 6\lambda^4 \vec{e}_y$

mais  $N_0 = \lambda n_0$  (cf I(6a))

donc  $\boxed{\vec{F}_D = -Q N_0 6\lambda^3 \vec{e}_y}$

I(8) b)  $\varphi = \left| \frac{F_D}{F} \right| = \frac{6\lambda^3}{\lambda_0^3}$

Si  $\langle r \rangle = \lambda_0$  alors  $\lambda_0 = \lambda$  (cf I(6c))

$\varphi = 6$

I 8c) Prendre en compte la distribution du rayon des gouttes a donné une force 6 fois + grande :

$F_D = 6 \cdot 10^3 \text{ N}$  (cf I 5 d)

La surface du pare-bris  $hl = 0,5 \text{ m}^2$  conduit donc à une pression  $p \approx 10^4 \text{ Pa}$   
 $(p = \frac{F_D}{hl})$

L'effet mécanique de la pluie est donc à  $10^{\text{e}}$  de la pression dans l'habitacle.

I 9a) La loi de Marshall-Palmer

$dN = n_0 e^{-\frac{r}{\lambda}} dr$  montre que

$\ln(\frac{dN}{dr}) = \ln n_0 - \frac{r}{\lambda}$  est une

droite décroissante. La figure le montre à condition que les gouttes aient un rayon  $> 1 \text{ mm}$ .

I 9b) Le faible régime correspond à la courbe (e)

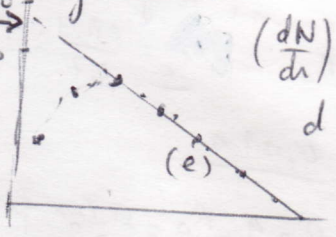
On mesure la pente  $\frac{\log 100 - \log(0,001)}{\lambda} = -8$

soit  $\frac{2+3}{-\lambda} = -\frac{5}{\lambda}$

Comme  $\log = \frac{\ln}{\ln 10}$ ,  $-\frac{1}{\lambda} = \ln 10 (-\frac{5}{\lambda})$

d'où  $\lambda = 0,5 \text{ mm}$

on obtient  $n_0$  par l'ordonnée à l'origine ; on lit par extrapolation



$(\frac{dN}{dr}) = 6000$  quand  $r=0$

d'où  $n = 6000 \text{ m}^{-3}$

g c)  $\langle r \rangle = \lambda = 0,5 \text{ mm}$

$N_0 = \lambda n_0 = 0,5 \times 6000 = 300 \text{ m}^{-3}$

avait trouvé en I 3 b)  $7 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$  c'est par la courbe (e) une petite précipitation

I 9 d) Le calcul de la pente repose sur un ensemble de points assez bien alignés, donc, comme il est lié à  $\lambda$ , on doit obtenir une assez bonne valeur de  $\lambda$  donc du rayon moyen  $\langle r \rangle$ .

L'ordonnée à l'origine avec échelle log est plus aléatoire comme lecture. On peut commettre facilement une erreur d'un facteur presque 5.

Enfin  $F \propto N_0 \lambda^3$  dépend surtout de  $\lambda$ . En résumé j'aurais dans l'ordre

$\langle r \rangle$	F	$N_0$	écart de la loi aux relevés météo
(= $\lambda$ )	-	-	-

10) a)  $E_0 = \gamma S = \gamma 2\pi R_0 L$   
 ( $R_0 \ll L \Rightarrow$  on néglige l'énergie des 2 bases du cylindre)

10) b)  $E_N = \gamma N \frac{4}{3} \pi r^3$

10) c) Le chapelet est plus stable si  $E_N < E_0$   
 soit  $2N r^2 < R_0 L$

Le volume de l'eau étant conservé  
 $\pi R_0^2 L = N \frac{4}{3} \pi r^3$  d'où  $N = \frac{3 R_0^2 L}{4 r^3}$

La condition du chapelet stable devient:  
 $\frac{3 R_0^2 L}{4 r^3} < R_0 L$  soit  $r > \frac{3}{4} R_0$

Il faut des gouttes assez grosses (il y en aura -)  
 11) a) Écrivons que le volume se conserve

$\pi R_0^2 L = \int_0^L \pi R^2 dx$   
 $R_0^2 L = \int_0^L (R_0^2 + 2a(R_0) \sin kx + a^2 \sin^2 kx) dx$

$R_0^2 L = (R_0^2) L + 2a(R_0) \left[ \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^L + a^2 \int_0^L \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx$

$R_0^2 L = (R_0^2) L + \frac{2a(R_0)}{k} (-\cos kL + 1) + a^2 \left( \frac{L}{2} - \left[ \frac{\sin 2kx}{4k} \right]_0^L \right)$

$R_0^2 L = (R_0^2) L + 0 + \frac{a^2 L}{2} - 0$   
 si  $kL \gg 1$   
 alors  $\lambda \ll L$  donc on a un certain nb de  $\lambda$  sur  $L$


d'où  $(R_0^2)^2 = R_0^2 - \frac{a^2}{2}$

avec  $\frac{a}{R_0} \ll 1$  :  $(R_0^2) \approx R_0^2 \left( 1 - \frac{a^2}{4R_0^2} \right)$

11) b) Calcul indépendant du résultat précédent ; se montrerait à partir de

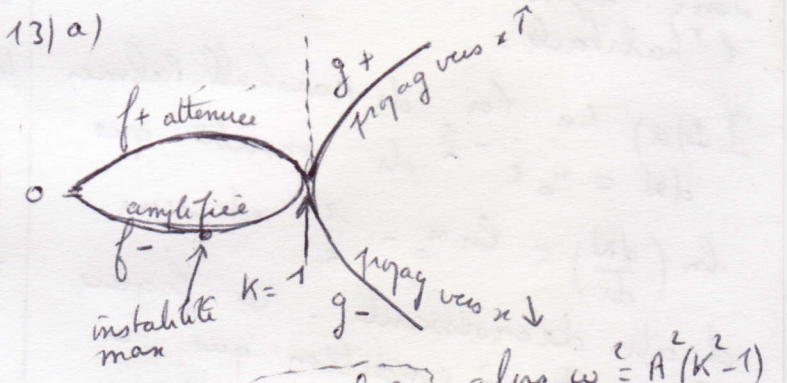
$dS = 2\pi R(dx')$   
 $dx' \neq dx$   
 $dx' = \sqrt{dx^2 + dR^2}$

peu d'intérêt dans ce calcul  
 c)  $R_0 \quad S_\lambda(a) < S_\lambda(0)$  si  $kR_0 < 1$  c'est à dire  $\lambda > 2\pi R_0$

La forme  est plus stable en énergie si  $\lambda > 2\pi R_0$  (6)

12) a)  $\omega$  réelle pour  $\omega^2 > 0$  c'est à dire  $kR_0 > 1$   
 ( $\omega$  réelle pour  $\lambda < 2\pi R_0$ )

12) b) si  $\omega$  réelle alors la perturbation se propage telle une onde progressive.  
 si  $\omega$  imaginaire alors la perturbation ne se propage plus ; elle peut être atténuée ou amplifiée (selon le signe donné à la racine) dans le temps.



Si on pose  $K = kR_0$  alors  $\omega^2 = A^2(K^2 - 1)$   
 $\omega = \pm A \sqrt{K^2 - 1}$  si  $K > 1 \Rightarrow$  propagation  
 $\omega = \mp A \sqrt{1 - K^2}$  si  $K < 1 \Rightarrow$  amplifiée (-) atténuée (+)

13) b) L'instabilité est la plus grande pour l'extrémum de  $f^-$   
 on lit  $K_c = 0,7$

$\tau_c = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{\Omega_0 K_c \sqrt{1 - K_c^2}} = \frac{1}{\Omega_0 0,7 \sqrt{1 - 0,7^2}} \approx \frac{2}{\Omega_0}$

$\tau_c = \frac{2}{\Omega_0} = \frac{2 \sqrt{\frac{2\rho_0 R_0^3}{\gamma}}}{\Omega_0}$

13) c) Noter : la tension superficielle qui freine, l'inertie (comme toujours)  
 13) d)  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi R_0}{k} \Rightarrow \frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi \cdot 1}{0,7} \approx 1 \text{ cm}$

$\tau_c = \frac{2 \sqrt{2 \times 988 \times 10^{-3}}}{\sqrt{72,8 \times 10^{-3}}} = 0,01 \text{ s}$

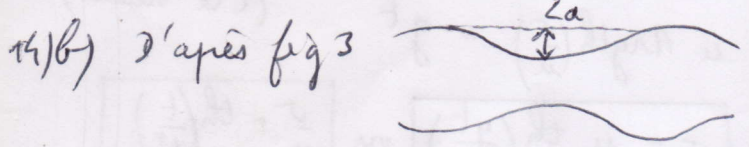
13) e)  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{R_0 g + R_0}{k} = \Omega_0 R_0 \times \text{pente}$   
 $v_\varphi = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{0,4} = 0,65 \text{ ms}^{-1}$

Pour  $K^2 \gg 1$   $v_\varphi \approx \frac{\Omega_0 k R_0 \cdot k R_0}{k} = \Omega_0 k R_0^2$

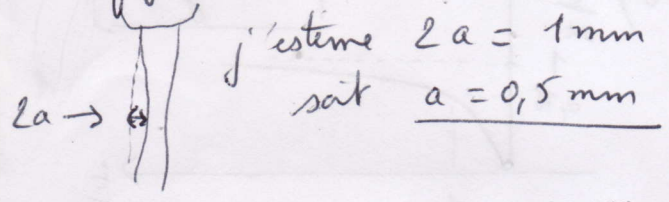
II C14/a)  $Q = \rho_e \pi R_0^2 U_0$

d'où  $U_0 = \frac{Q}{\rho_e \pi R_0^2}$   $U_0 = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{998 \pi 10^{-6}}$

$U_0 = 0,6 \text{ ms}^{-1}$



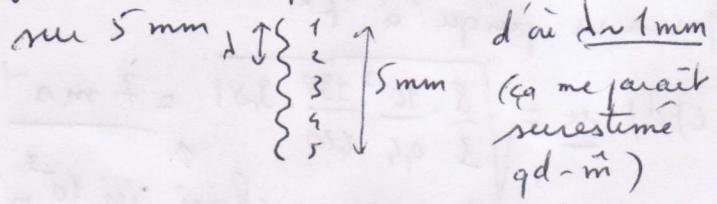
et la fig 5 a, en sortie du filet d'eau



15)a) Si onde, alors  $\omega$  réel

15)b) Apparence figée / labo (est que  $v_\varphi = -U_0$  (comme un voyageur qui remonte le sens du tapis roulant))

15)c) Je crois observer 5 petits points blancs (correspondant à des creux)



d'où  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$

et  $kR_0 = \frac{2\pi R_0}{\lambda} = 2\pi \approx 6$

15)d)  $v_\varphi = \Omega_0 k R_0^2$  d'après 13)e)

$v_\varphi = \sqrt{\frac{8}{2\rho_e R_0^3}} k R_0 \cdot R_0 = \sqrt{\frac{748 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 998 \cdot 10^{-9}}} \cdot 6 \cdot 10^{-3}$

$v_\varphi \approx 1 \text{ ms}^{-1}$  comparable à  $U_0$

15)e) Hyp. faites jusqu'alas:

$R_0 \ll L$  : peut-être limité en fig 5c)

non visqueux : à moins que la viscosité change en fonction de la hauteur du jet, on ne voit pas le rôle que ça jouerait sur  $\lambda$

$K \gg 1$  soit  $kR_0 \gg 1$  soit  $\lambda \ll R_0$  (7)  
la hauteur du filet d'eau n'a pas changé son rayon donc cette hyp n'expliquerait pas  
autres hyp?

15)f) Si atténuation, alas prendre en compte la viscosité.