métalliques

En envoyant sur des sphères deux impulsions laser ultracourtes séparées par un délai variable, on peut observer la transmission de la deuxième impulsion par le milieu après avoir excité les sphères. Les résultats sont présentés sur la figure 5. On observe une modulation très rapide de la transmission qui s'amortit. Ceci est dû à l'excitation d'un mode de vibration acoustique dans chacune des sphères.

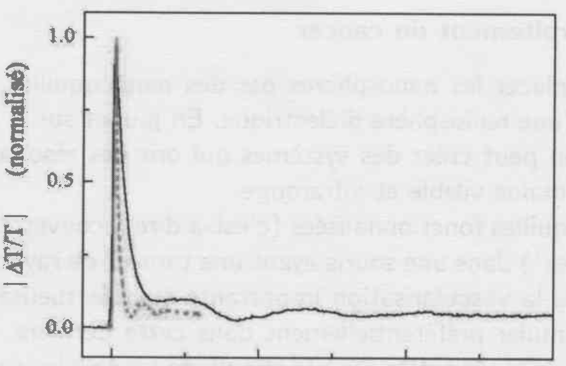


FIG. 5 – Variation de la transmission d'une impulsion laser en fonction de son délai après une première impulsion. Deux séries de données sont présentées pour $R = 13$ nm (trait plein) et $R = 3$ nm (trait pointillé)

3.2.1 Modélisation de la propagation des ondes acoustiques radiales

On considère que le métal peut se déformer élastiquement : sous l'effet de la force F le solide se déforme et sa longueur augmente de δl. On suppose que cette déformation est réversible, linéaire, et dans la même direction que la force. Dans ce cadre, contrainte et élongation sont reliées suivant la

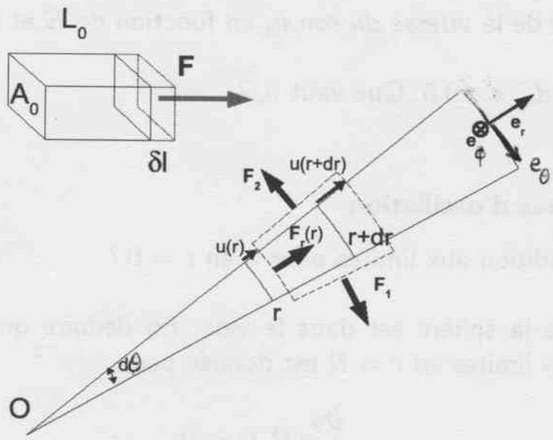


FIG. 6 – Relation entre contrainte et déformation pour un matériau élastique. Effet des déformations élastiques sur une tranche de la nanosphère dans la direction (θ, ϕ).

relation :

$$F = E\frac{A_0}{L_0}\delta l,$$

où A_0 et L_0 sont respectivement la surface sur laquelle on applique la contrainte et la longueur à vide de l'élément (voir la figure 6). Le module d'Young E est caractéristique du matériau.

On peut trouver l'origine de la relation entre contrainte et élongation dans les forces de cohésion qui lient entre eux les constituants microscopiques du solide. On suppose que ces forces de cohésion sont analogues à de petits ressorts liant les atomes entre eux, leur longueur à vide correspondant à la distance entre atome à l'équilibre.

Q54. Justifiez dans ce cadre la dépendance de la force avec A_0 et L_0.
celui des ressorts

Q55. Quelle est la dimension de E ? Pour l'Argent on donne $E = 83\ 10^9$ USI.

On s'intéresse aux modes de "respiration" de la sphère. Les déplacements sont isotropes et radiaux en $u(r,t)e_r$. Dans ces conditions on peut se limiter à l'étude d'une petite portion de la sphère dans la direction (θ, ϕ). On s'intéresse au déplacement du petit élément de volume compris entre les rayons r et $r + dr$.

Q56. Exprimer la dérivée de la quantité de mouvement $\frac{dp}{dt}$ de cet élément de volume en fonction des grandeurs du système, en partant de l'expression de p.

Q57. On appelle $F_r(r)$ la force radiale exercée sur l'élément de volume . (voir figure 6). Montrer que l'on a :

$$F_r = E\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\theta d\theta d\phi\, dr\, e_r$$

Q58. Calculer la résultante F_t des forces transverses exercées sur l'élément de volume (deux d'entre elles sont représentées sur la figure 6). Montrer qu'elle vaut :

$$F_t = -2Eu(r)dr\sin\theta d\theta d\phi e_r.$$

Q59. En déduire que $u(r,t)$ satisfait l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{r^2}u - \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

où on donnera l'expression de la *vitesse du son* v_s en fonction de E et de la masse volumique.

Q60. On rappelle que $d_{\text{Ag}} = 10.5$. Que vaut v_s ?

3.2.2 Fréquences propres d'oscillation

Q61. Quelle est la condition aux limites pour u en $r = 0$?

Q62. On suppose que la sphère est dans le vide. En déduire que, dans le cadre du modèle précédent, la condition aux limites en $r = R$ est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, t) = 0,$$

On cherche maintenant des solutions pour $u(r, t)$ oscillant à la fréquence ω_s : $u(r, t) = \widehat{u}(r) e^{-i\omega_s t}$

Q63. Quelle est l'équation vérifiée par $\widehat{u}(r)$?

On peut montrer que les fonctions qui sont solutions de l'équation **Q63** et qui vérifient la condition aux limites en $r = 0$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{u}(r) &= \frac{A}{\xi^2}(\xi \cos \xi - \sin \xi) \\ \text{avec } \xi &= \frac{\omega_s r}{v_s} \end{aligned}$$

Q64. Montrer que la condition aux limites en $r = R$ se traduit par la condition :

$$\begin{aligned} \tan \xi_R &= \frac{\xi_R}{1 - \frac{\xi_R^2}{2}} \\ \text{avec } \xi_R &= \frac{\omega_s R}{v_s} \end{aligned}$$

Q65. En déduire que les fréquences de résonance des différents modes de vibration sont données par :

$$\frac{\omega_s R}{v_s} \approx n\pi, \ n \in \mathbb{N}$$

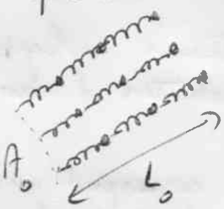
dans la limite où $n \gg 1$. *Indication :* on pourra proposer une méthode graphique de résolution après avoir étudié précisément la fonction $x/(1 - x^2/2)$ entre 0 et π.

Un modèle plus exact des déformations élastiques montre que lorsque l'on étire un élément de volume dans une direction donnée, il s'allonge dans cette direction et se contracte dans les directions transverses (on peut le constater facilement si on tire sur un élastique en caoutchouc). Cet effet couple les effets des forces radiales et transverses dans la géométrie précédente. On peut montrer alors que u satisfait la même équation différentielle que **Q59** avec une correction sur la vitesse du son. On a alors $v_s = 3650$ m s^{-1}. La condition aux limites en $r = R$ est également modifiée mais cela affecte peu les fréquences propres de la question précédente.

Q66. Calculer la période d'oscillation du premier mode de vibration pour $R = 13$ nm et $R = 3$ nm. Comment ce résultat se compare-t-il aux données de la figure 5.

ENS Paris PC 08

Q54 Dans le cadre des atomes liés entre eux par des ressorts on a le schéma :



aire A_0 L_0

Or les ressorts en parallèle sont équivalents à 1 seul de constante de raideur $k_{eq} = \sum_i k_i$ // alors que les ressorts en série conduisent à $\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$ série

ce qui fait que la raideur augmente avec A_0 car on aura plus de ressorts en // donc il faut plus de force pour tirer.
A l'~~inverse~~ la raideur diminue avec le nombre de ressorts en série donc il faut moins de force pour allonger de δl.
c'est pourquoi F est proportionnelle à A_0 et inversement proportionnelle à L_0.

Q55 $E \sim \frac{F}{L^3}L \sim ML^{-1}t^{-2}$ en $kg\,m^{-1}s^{-2}$

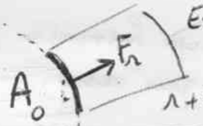
ou bien aussi $E \sim \frac{F}{L^2} \sim p$ pression en Pa

Q56 La masse de l'élément de volume est $m = \mu\, dr\, r d\theta\, r\sin\theta\, d\phi$ $(r\,\theta\,\phi)$ coord sphériques

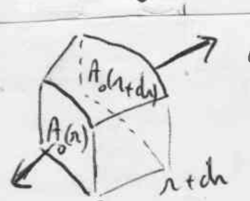
La quantité de mouvement est :
$\vec f = m\vec v = \mu r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \frac{\partial u}{\partial t}\vec e_r\, dr$

donc $\boxed{\frac{d\vec f}{dt} = \mu r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\vec e_r\, dr}$

Q57



En r la surface $A_0 = r d\theta\, r\sin\theta\, d\phi$
la longueur est dr



L'élément est allongé de $u(r+dr) - u(r)$ soit de $\frac{\partial u}{\partial r}dr \overset{\vee}{=} \delta l$

La surface $A_0(r+dr)$ est tirée avec la force $F(r+dr) = E\frac{A_0(r+dr)}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r+dr}dr$

La surface $A_0(r)$ est tirée avec la force $F(r) = -E\frac{A_0(r)}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_r dr$

Résultante : $\boxed{F_r = E\frac{\partial(A_0 u')}{\partial r}dr = E\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr}$ (OK)

Q58

Ces 2 forces ont une résultante // $\vec e_r$

Leur module : $F_1 = F_2$

$\vec F_1 + \vec F_2 = -2F_1 \sin\frac{d\theta}{2}\,\vec e_r$

L'aire sur laquelle s'exercent F_1 ou F_2 est $dr\, r\sin\theta\, d\phi$

La longueur est $r d\theta$ au repos et devient $(r+u)d\theta$ en mouvement d'où $\delta l = u\, d\theta$

Ainsi $\vec F_1 + \vec F_2 = E\,\frac{dr\, r\sin\theta\, d\phi\, u\, d\theta}{r\, d\theta}\left(-2\sin\frac{d\theta}{2}\right)\vec e_r$

soit une première force transverse en $-Eu\, dr\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \vec e_r$ car $\sin\frac{d\theta}{2} \simeq \frac{d\theta}{2}$

L'autre contribution transverse est dans le plan équatorial et identique donc

$\boxed{\vec F_t = -2Eu\, dr\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \vec e_r}$ (OK)

Q59 On applique la relation fondamentale de la dynamique : $\frac{d\vec f}{dt} = \vec F_r + \vec F_t$

$$\mu r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dr = E\frac{\partial(r^2 u')}{\partial r}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr - 2Eu\, dr\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\mu r^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\,2r\frac{\partial u}{\partial r} + Er^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2Eu$$

En divisant par Er^2 :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} - \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$ (OK)

$\boxed{v_s^2 = \frac{E}{\mu}}$

Q60 $v_s = \left(\frac{83\cdot10^9}{10{,}5\times10^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 2{,}81\cdot10^3\ m\,s^{-1}$

Q61 Il ne peut pas se créer du vide au centre de la sphère donc $\boxed{u(r=0)=0}$

Q62 Dans le vide rien ne peut contraindre la limite R à être tirée ou compressée
cf Q57 la force est en R proportionnelle à $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right)_R$ donc comme cette force est nulle on a $\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}(R,t) = 0}$

Q63 Remplaçons dans l'équation de Q59 :

$$\boxed{\hat u'' + \frac{2}{r}\hat u' - \frac{2\hat u}{r^2} + \frac{\mu}{E}\omega_s^2\,\hat u = 0}$$

Q64 En R $\frac{\partial \hat u}{\partial r} = 0$ peut donc s'écrire

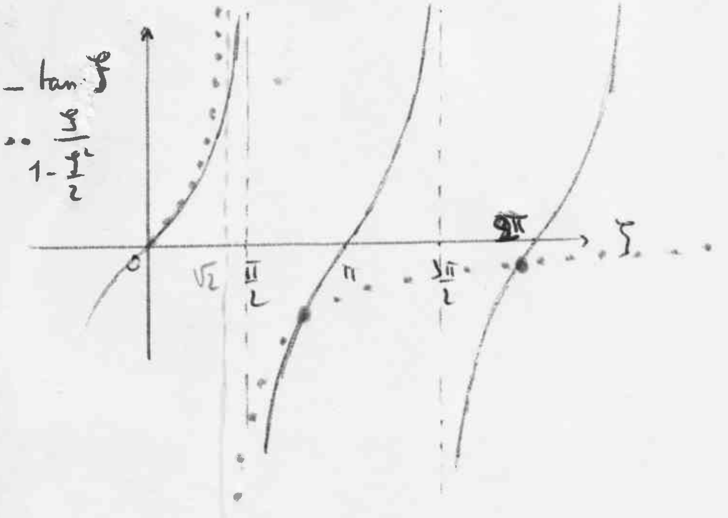
$$-\frac{2}{\xi^2}(\xi\cos\xi - \sin\xi) + \frac{1}{\xi^2}(\cos\xi - \xi\sin\xi - \cos\xi) = 0$$

soit $-2\xi\cos\xi + 2\sin\xi + \xi\cos\xi - \xi^2\sin\xi - \xi\cos\xi = 0$

d'où $\boxed{\tan \xi_R = \dfrac{\xi_R}{1-\frac{\xi_R^2}{2}}}$ (OK) $\boxed{\xi_R \overset{\nu}{=} \xi(R) = \dfrac{\omega_s R}{v_s}}$

Q65 Il faut tracer les 2 courbes $\xi \mapsto \dfrac{\xi}{1-\frac{\xi^2}{2}}$ et $\tan\xi$ pour voir leurs points d'intersection.

$\xi \mapsto \dfrac{\xi}{1-\frac{\xi^2}{2}}$. définie sur IR sauf $\sqrt{2} = 1,4 < \frac{\pi}{2}$
. croissante
. nulle en $\xi = 0$
. nulle en $\xi \longrightarrow +\infty$



On remarque que mis à part les premiers points d'intersection, on peut considérer que les courbes se coupent à $\xi \simeq n\pi$ $\quad n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$

Les fréquences de résonance sont bien pour $\boxed{\dfrac{\omega_s R}{v_s} \simeq n\pi \quad n\in\mathbb{N} \quad n \gg 1}$ (OK)

Q66 En admettant la formule pour $n = 1$ $\quad \omega_{s_1} = \dfrac{\pi v_s}{R} = \dfrac{\pi \times 3650}{13\times10^{-9}}$

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_{s_1}} = \dfrac{2\times13\times10^{-9}}{3650} = 7$ ps pour R = 13 nm

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_{s_1}} = \dfrac{2\times3\times10^{-9}}{3650} = 1,6$ ps pour R = 3 nm

La figure 5 est en accord avec ce résultat pour les nanosphères de 3 nm

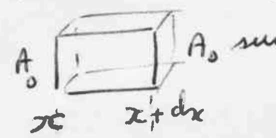
Résumé :

Un milieu rempli de nanosphères métalliques et parcouru par une onde acoustique peut entrer en résonance

Une onde acoustique radiale (en coord. sphériques) va déformer un petit élément de volume du métal. La force de contrainte est proportionnelle à l'allongement et dans la direction de cet allongement. Elle est aussi proportionnelle à la surface sur laquelle s'exerce cette force et inversement proportionnelle à la longueur à vide de l'élément.

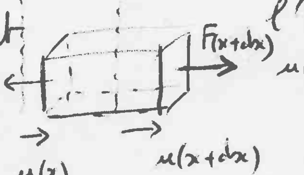
Pour un élément bien parallélépipédique

au repos



A_0 surface la longueur au repos est dx

en mouvement



l'allongement est $u(x+dx) - u(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx$

la force qui tire vers la droite est $F(x+dx) \propto A_0 \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} \dfrac{dx}{dx}$

la force qui tire vers la gauche est $F(x) \propto A_0 \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x} \dfrac{dx}{dx}$

La force résultante de contrainte sur le morceau de métal est $F(x+dx) - F(x) \propto A_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$

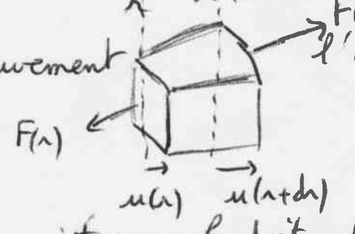
On voit que la résultante dépend de la variation de vitesse de déplacement des 2 surfaces en x et en x+dx. Si cette vitesse ne varie pas alors il n'y a pas de contrainte.

Pour un élément découpé en coord. sphérique, il faut en plus tenir compte de la variation de surface :

au repos

la longueur au repos est dr

en mouvement



l'allongement est $u(r+dr) - u(r) = \dfrac{\partial u}{\partial r}dr$

la force qui tire vers la droite est $F(r+dr) \propto A_0(r+dr)\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)_{r+dr} \dfrac{dr}{dr}$

la force qui tire vers la gauche est $F(r) \propto A_0(r)\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)_{r} \dfrac{dr}{dr}$

la résultante est $F(r+dr) - F(r) \propto \dfrac{\partial\left(A_0 \frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} dr$ avec A_0 proportionnel à r^2.

De plus dans cette géométrie sphérique il faut tenir compte des forces transverses dont la résultante est radiale