

Nous considérons à plusieurs reprises dans le problème un signal lumineux quasi-monochromatique dont l'amplitude et la phase sont modulées avec des temps caractéristiques longs devant la période du signal. Un tel signal peut ainsi être décrit par l'expression mathématique :

$$s(t) = s_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$$

soit, en notation complexe où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\pi/2$:

$$\underline{s}(t) = \underline{s}_0(t) \exp(i\omega_0 t).$$

Pour un tel signal :

- L'intensité lumineuse instantanée est la quantité $I(t) = K \underline{s} \underline{s}^*$, où K est une constante et où \underline{s}^* représente le complexe conjugué de \underline{s} .
- Un photodétecteur, qui sera en pratique une photodiode de temps de réponse τ_R , délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à la moyenne de $I(t)$ déterminée sur une durée τ_R , soit $u(t) = K' \langle I(t) \rangle_{\tau_R}$ où K' est une constante.

On rappelle les constantes fondamentales : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide, $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ la masse de l'électron, $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ la charge élémentaire, $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ la constante de Planck, $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ le nombre d'Avogadro.

On donne également la masse molaire du mercure égale à $0,200 \text{ kg.mol}^{-1}$.
césium $0,133 \text{ kg.mol}^{-1}$

— Première partie —

I Largeur spectrale d'une raie lumineuse

On propose de représenter par un modèle classique l'émission d'un signal lumineux par un atome préalablement excité. On adopte le modèle de l'électron élastiquement lié. Un nuage électronique supposé indéformable, de charge totale $-e$, de masse m et de barycentre N peut effectuer de petites oscillations. À l'équilibre, le centre N du nuage électronique est situé au point O, barycentre des autres charges de l'atome. Le moment dipolaire de l'atome est donc nul à l'équilibre. Le nuage électronique est soumis à une force de rappel élastique, de constante de raideur notée $k = m\omega_0^2$.

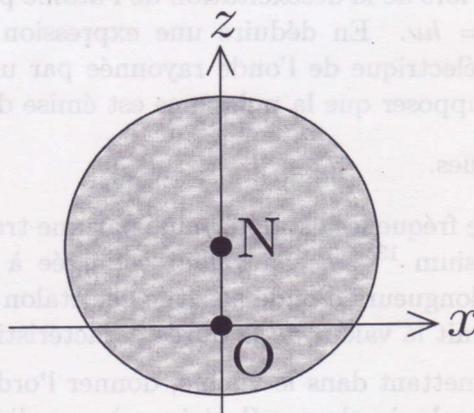


Figure 1: Représentation classique de l'atome par le modèle de l'électron élastiquement lié.

(I.1) Pour cette question, on néglige tout effet dissipatif et l'atome est supposé isolé.

(I.1.a) Quelle approximation fait-on en supposant que $(0, x, y, z)$ est galiléen? le point O est immobile? Nous ferons dorénavant cette approximation.

(I.1.b) Le système effectue des oscillations libres de la forme :

$$\vec{ON} = A \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z. \quad (1)$$

Déterminer l'énergie (totale) \mathcal{E} de l'oscillateur harmonique constitué par l'atome. On l'exprimera en fonction des paramètres A , m et ω_0 .

(I.2) La puissance instantanée rayonnée par le dipôle est donnée par la formule de LARMOR :

$$\Phi = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 \quad (2)$$

où \ddot{p} représente la dérivée seconde par rapport au temps du moment dipolaire électrique de l'atome. En tenant compte de l'énergie perdue par rayonnement, les oscillations libres du système sont maintenant décrites sous la forme :

$$\vec{ON} = A(t) \cos(\omega_0 t) \vec{e}_z. \quad (3)$$

La fonction $A(t)$ ayant une durée caractéristique d'évolution très grande devant $2\pi/\omega_0$, nous considérons qu'à un instant donné t , l'expression de l'énergie établie à la question précédente reste toujours valable.

(I.2.a) Exprimer en fonction de $A(t)$ et des autres données, la puissance moyenne $\langle \Phi \rangle(t)$ rayonnée par le dipôle pendant une période.

(I.2.b) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'énergie $\mathcal{E}(t)$.

En déduire l'expression de $\mathcal{E}(t)$. Quelle est l'expression de la durée caractéristique τ_0 d'un train d'ondes émis par l'atome ?

(I.2.c) L'énergie totale émise lors de la désexcitation de l'atome peut être associée à l'énergie d'un photon $E_{\text{émise}} = h\nu$. En déduire une expression approchée de l'amplitude maximale du champ électrique de l'onde rayonnée par un atome unique à une distance r . On pourra supposer que la puissance est émise de façon isotrope.

(I.2.d) Applications numériques.

- L'étalon officiel de fréquence est déterminé par une transition entre deux niveaux de l'atome de césium ^{133}Cs . Sa valeur est fixée à 9 192 631 770 Hz. Dans quel domaine de longueurs d'onde se situe cet étalon de fréquence ? Avec notre modèle, quelle serait la valeur de la durée caractéristique τ_0 des trains d'onde ?
- Pour un atome émettant dans le visible, donner l'ordre de grandeur de τ_0 et de l'amplitude maximale du champ électrique à une distance de l'atome émetteur égale à 1 mètre.

(I.3) Un train d'ondes quasi-monochromatique, donné pour $t > 0$ par l'expression :

$$s(t) = s_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos(\omega_0 t) \quad \text{avec } \omega_0 \tau \gg 1, \quad (4)$$

et illustré par la figure 2, peut se représenter par une superposition d'ondes parfaitement monochromatiques, chacune de durée infinie.

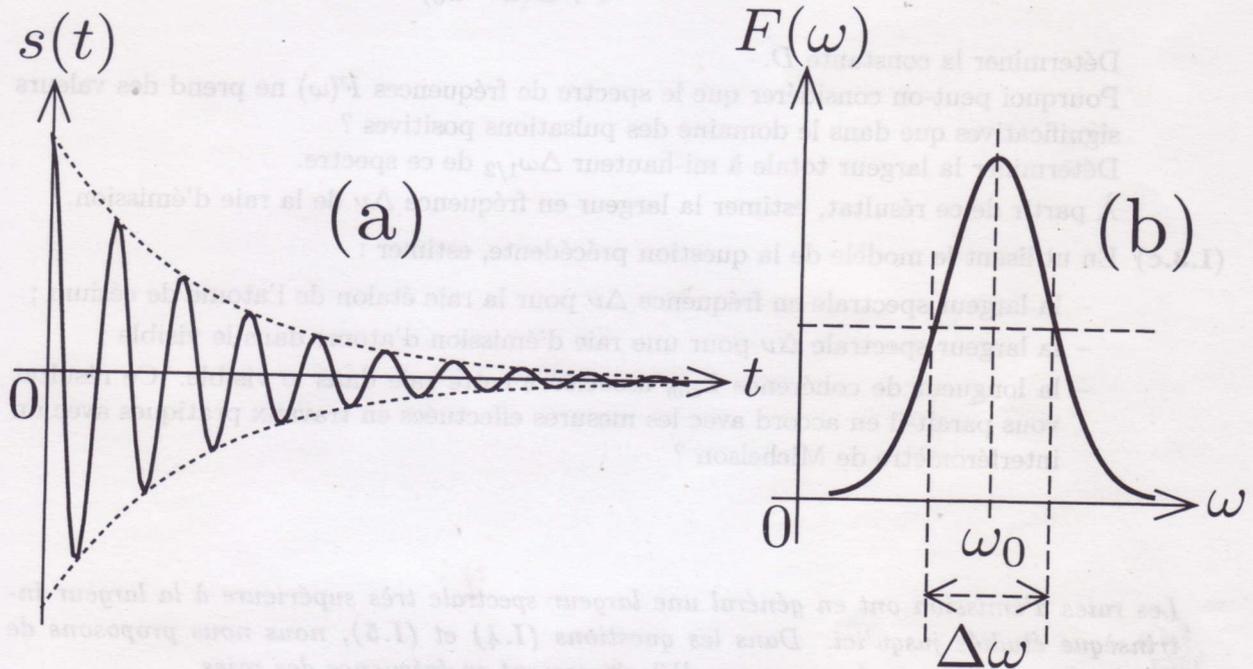


Figure 2: Représentations temporelle (a) et fréquentielle (b) d'un train d'ondes quasi-monochromatique.

On montre que le signal $s(t)$ peut s'écrire :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (5)$$

où la fonction $\tilde{F}(\omega)$ prend des valeurs non nulles aussi bien pour les pulsations ω positives que négatives.

(I.3.a) Sachant que pour τ réel strictement positif :

$$\exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) = \frac{\tau}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{1 + \tau^2 \omega^2} d\omega, \quad (6)$$

montrer que $\tilde{F}(\omega)$ est de la forme :

$$\tilde{F}(\omega) = B \left[\frac{1}{1 + C(\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{1 + C(\omega + \omega_0)^2} \right] \quad (7)$$

Déterminer les deux constantes B et C .

En se rappelant que $\omega_0 \tau \gg 1$, représenter $\tilde{F}(\omega)$ sur tout l'axe des réels.

(I.3.b) Montrer que l'on peut réécrire le signal $s(t)$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (8)$$

où $F(\omega)$ est de la forme :

$$F(\omega) = \frac{D}{1 + C(\omega - \omega_0)^2} \quad (9)$$

Déterminer la constante D .

Pourquoi peut-on considérer que le spectre de fréquences $F(\omega)$ ne prend des valeurs significatives que dans le domaine des pulsations positives ?

Déterminer la largeur totale à mi-hauteur $\Delta\omega_{1/2}$ de ce spectre.

À partir de ce résultat, estimer la largeur en fréquence $\Delta\nu$ de la raie d'émission.

(I.3.c) En utilisant le modèle de la question précédente, estimer :

- la largeur spectrale en fréquence $\Delta\nu$ pour la raie étalon de l'atome de césium ;
- la largeur spectrale $\Delta\nu$ pour une raie d'émission d'atome dans le visible ;
- la longueur de cohérence L_{coh} associée à cette raie dans le visible. Ce résultat vous paraît-il en accord avec les mesures effectuées en travaux pratiques avec un interféromètre de Michelson ?

Les raies d'émission ont en général une largeur spectrale très supérieure à la largeur intrinsèque étudiée jusqu'ici. Dans les questions (I.4) et (I.5), nous nous proposons de décrire et modéliser quelques causes d'élargissement en fréquence des raies.

(I.4) Nous avons supposé que l'atome émetteur était immobile. Or, l'agitation thermique provoque une dispersion des fréquences par effet Doppler.

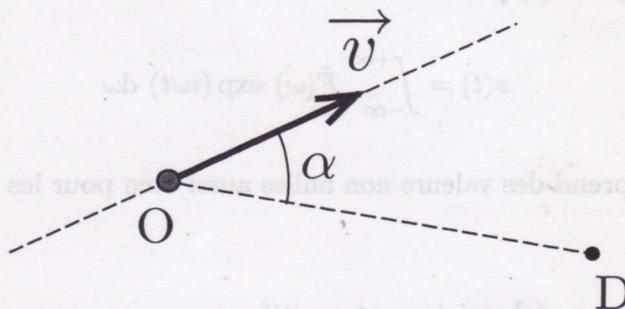


Figure 3: Géométrie relative à la modélisation de l'effet Doppler.

(I.4.a) Le détecteur, supposé immobile dans le référentiel d'étude, est situé au point D (figure 3). Le centre O de l'atome émetteur se déplace avec une vitesse \vec{v} supposée constante. Sa norme $v = \|\vec{v}\|$ étant très faible devant c , nous pouvons utiliser sans dommage les relations de la cinématique non relativiste. En ne tenant pas compte de l'atténuation du signal avec la distance, un signal monochromatique émis en O et reçu en D a pour expression :

$$s(D, t) = s_0 \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{OD}{c} \right) \right] \quad \text{soit} \quad s(D, t) = s_0 \cos [\varphi(t)] \quad (10)$$

- Déterminer la pulsation instantanée ω du signal perçu par le détecteur à partir de la dépendance temporelle de la fonction $\varphi(t)$.
- Exprimer en fonction du paramètre v et de l'angle α défini sur la figure 3 la dérivée $\frac{dOD}{dt}$. En déduire l'expression de la pulsation instantanée ω en fonction des paramètres ω_0 , v , c et α .

(I.4.b) Une vapeur métallique est enfermée dans une cellule de verre (figure 4).

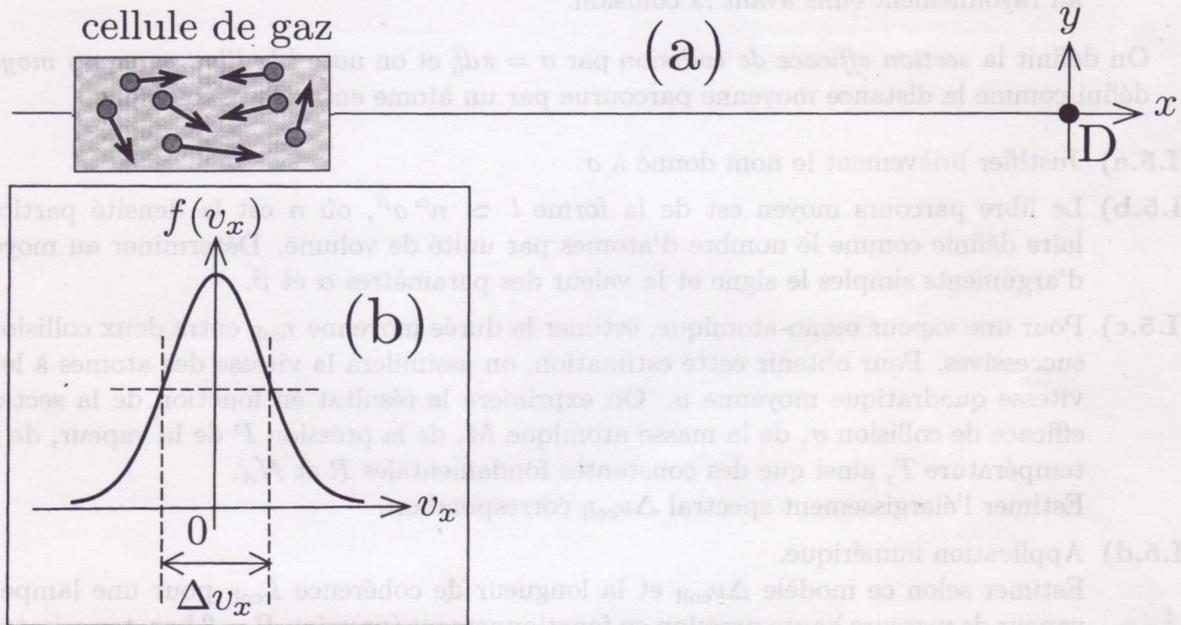


Figure 4: Modélisation de la radiation émise par une assemblée d'atomes ayant une agitation thermique.

Chacun des atomes contenus dans la vapeur est excité et émet une radiation quasi-monochromatique vers un détecteur disposé comme indiqué sur la figure 4(a). Les atomes ont une vitesse d'agitation thermique aléatoire $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$. La loi de distribution de la composante selon l'axe x des vitesses est une loi "en cloche" comme celle qui est représentée sur la figure 4(b), avec une largeur caractéristique Δv_x . La probabilité élémentaire que la composante selon l'axe x de la vitesse d'un atome soit comprise entre les valeurs v_x et $v_x + dv_x$ est $dP = f(v_x)dv_x$.

- Estimer la largeur spectrale $\Delta\nu$ de la radiation perçue par le détecteur en fonction de ν_0 (fréquence dans le référentiel où l'atome est au repos), c et Δv_x .

(I.4.c) On considère un gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermique à la température T .

- Quelle est la valeur de la vitesse quadratique moyenne u ?
En déduire celle de $u_x = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$.
- En déduire un ordre de grandeur de l'élargissement par effet Doppler $\Delta\nu_{\text{Dop}}$ pour une raie visible émise par une lampe à vapeur de mercure portée à une température de 1000 K. Estimer la longueur de cohérence L_{coh} correspondante et commenter.
- Déterminer $\Delta\nu_{\text{Dop}}$ pour l'étalon de fréquence à la température de 300 K. À quelle température faudrait-il porter l'échantillon pour obtenir une largeur $\Delta\nu_{\text{Dop}}$ de l'ordre de 100 Hz ? Commenter (on observera la précision avec laquelle l'étalon de fréquence est défini).

(I.5) Nous avons jusqu'à présent ignoré les interactions entre les atomes du milieu émetteur. Lorsque celui-ci est un gaz, on peut modéliser ces interactions en considérant qu'elles respectent les règles suivantes :

- L'interaction est nulle si la distance d entre les centres des deux atomes est supérieure à une distance caractéristique d_0 ;
- Il y a collision si cette distance d devient égale à d_0 . Dans ce cas, le rayonnement émis par chacun des atomes est perturbé et acquiert un déphasage aléatoire par rapport au rayonnement émis avant la collision.

On définit la *section efficace de collision* par $\sigma = \pi d_0^2$ et on note l le *libre parcours moyen* défini comme la distance moyenne parcourue par un atome entre deux collisions.

(I.5.a) Justifier brièvement le nom donné à σ .

(I.5.b) Le libre parcours moyen est de la forme $l \simeq n^\alpha \sigma^\beta$, où n est la densité particulaire définie comme le nombre d'atomes par unité de volume. Déterminer au moyen d'arguments simples le signe et la valeur des paramètres α et β .

(I.5.c) Pour une vapeur mono-atomique, estimer la durée moyenne τ_{coll} entre deux collisions successives. Pour obtenir cette estimation, on assimilera la vitesse des atomes à leur vitesse quadratique moyenne u . On exprimera le résultat en fonction de la section efficace de collision σ , de la masse atomique M , de la pression P de la vapeur, de sa température T , ainsi que des constantes fondamentales R et \mathcal{N}_A .
Estimer l'élargissement spectral $\Delta\nu_{\text{coll}}$ correspondant.

(I.5.d) Application numérique.

Estimer selon ce modèle $\Delta\nu_{\text{coll}}$ et la longueur de cohérence L_{coh} pour une lampe à vapeur de mercure haute pression en fonctionnement (pression $P = 3$ bar, température $T = 1000$ K). Commenter le résultat.

Pour déterminer σ , on prendra $d_0 \simeq 5 \times 10^{-10}$ m.

— Deuxième partie —

II Source lumineuse cohérente : laser

Les atomes d'une source classique, comme par exemple une lampe à vapeur de mercure, émettent de façon désordonnée. La phase de l'onde obtenue ne reste approximativement constante que pendant une durée de l'ordre du temps de cohérence. Pour obtenir une onde presque monochromatique (du moins pour augmenter très fortement le temps de cohérence), il faut contraindre les atomes à émettre en phase. C'est ce qui est réalisé dans un laser.

Un laser est constitué schématiquement d'un milieu amplificateur de lumière inséré dans une cavité (figure 5). Nous considérons ici une cavité unidimensionnelle composée de deux miroirs plans et parallèles notés \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . Pour simplifier, nous considérons que le milieu amplificateur occupe tout l'espace compris entre eux. Le milieu est rendu amplificateur par un procédé non étudié ici, appelé "pompage". Une source extérieure d'énergie place une majorité d'atomes du milieu dans un état excité. Ce "pompage" peut être réalisé soit optiquement soit électriquement.

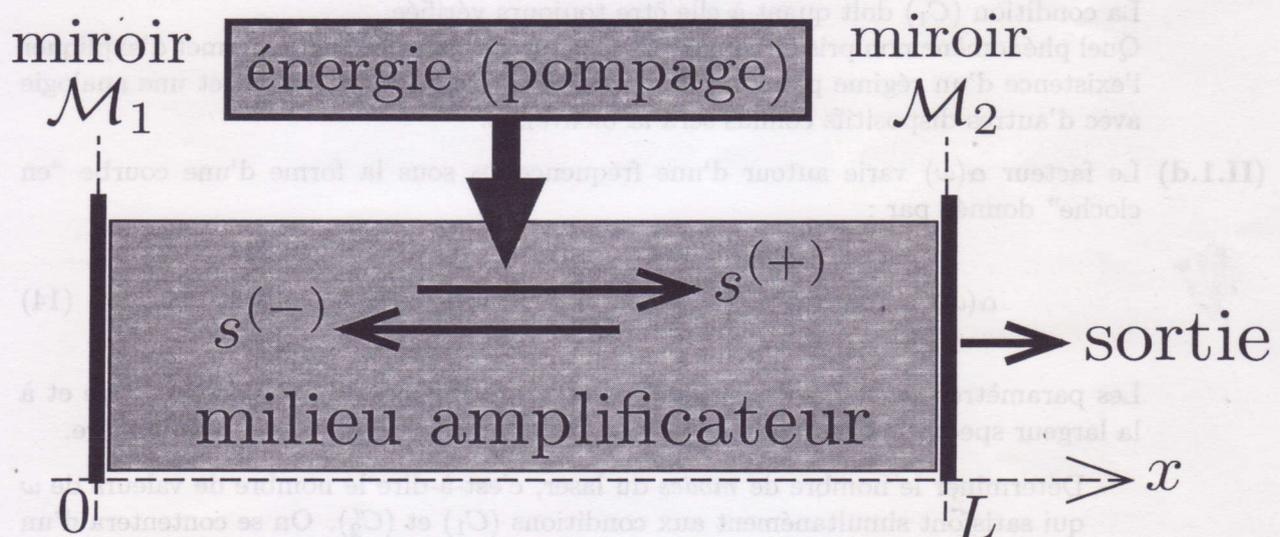


Figure 5: Représentation schématique d'une cavité laser composée d'un milieu amplificateur de lumière compris entre deux miroirs.

En régime permanent, la lumière à l'intérieur de la cavité de longueur L est décrite par deux ondes planes progressant en sens inverses. Pour une pulsation ω , ces deux ondes s'écrivent en notation complexe :

$$\underline{s}(x, t) = \underline{s}^{(+)}(x, t) + \underline{s}^{(-)}(x, t) \quad (11)$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{s}^{(+)}(x, t) = \underline{a}^{(+)} \exp[\alpha(\omega)x - ik(\omega)x] \exp(i\omega t) \\ \underline{s}^{(-)}(x, t) = \underline{a}^{(-)} \exp[-\alpha(\omega)x + ik(\omega)x] \exp(i\omega t) \end{cases} \quad (12)$$

On suppose le milieu non dispersif, de sorte que

$$k(\omega) = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda} \quad (13)$$

avec λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction du milieu amplificateur. La grandeur $\alpha(\omega)$ est réelle.

Les coefficients de réflexion (en amplitude) sont égaux à 1 pour le miroir \mathcal{M}_1 et $1 - \epsilon$ pour le miroir \mathcal{M}_2 . On ne tient pas compte des éventuels déphasages lors des réflexions sur les miroirs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , ainsi que lors de la transmission par le miroir \mathcal{M}_2 permettant à la lumière de sortir de la cavité du laser.

(II.1) Conditions pour le fonctionnement du laser.

(II.1.a) À quelle condition portant sur $\alpha(\omega)$ le milieu est-il amplificateur de lumière ?

(II.1.b) *Exclure les conditions limites d'un régime permanent* À *quelles conditions un régime permanent est-il possible ?* *Cela mènera à* On déterminera deux conditions notées respectivement (C_1) , portant sur les paramètres n , L et λ , et (C_2) , portant sur les paramètres ϵ , $\alpha(\omega)$ et L .

(II.1.c) Ces conditions sont-elles a priori réalisables simultanément ?

L'apparition spontanée d'oscillations de pulsation ω implique que la condition (C_2) soit remplacée par une inégalité (C'_2) qui, dans le cas où $\epsilon \ll 1$, s'écrit :

$$2\alpha(\omega)L \geq \epsilon.$$

La condition (C_1) doit quant à elle être toujours vérifiée.

Quel phénomène non pris en compte dans la discussion précédente permet d'expliquer l'existence d'un régime permanent ? On raisonnera qualitativement et une analogie avec d'autres dispositifs connus sera la bienvenue.

(II.1.d) Le facteur $\alpha(\omega)$ varie autour d'une fréquence ω_0 sous la forme d'une courbe "en cloche" donnée par :

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \exp \left[- \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad \alpha_0 L = 2 \times 10^{-2}. \quad (14)$$

Les paramètres ω_0 et $\Delta\omega$ correspondent respectivement à la pulsation centrale et à la largeur spectrale caractéristique d'une raie du milieu amplificateur de lumière.

- Déterminer le nombre de *modes* du laser, c'est-à-dire le nombre de valeurs de ω qui satisfont simultanément aux conditions (C_1) et (C'_2) . On se contentera d'un résultat à ± 1 près.

- Application numérique : calculer le nombre de modes pour $nL = 1,5 \text{ m}$, $\Delta\nu = \Delta\omega/(2\pi) = 500 \text{ MHz}$, $\epsilon = 0,01$ et $\nu_0 = \omega_0/(2\pi) = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$.

(II.2) Par construction du laser, la condition (C'_2) est supposée vérifiée entre les fréquences limites $\nu_1 = \nu_0 - 40 \text{ MHz}$ et $\nu_2 = \nu_0 + 40 \text{ MHz}$, où ν_0 est située dans le domaine optique. On suppose que la longueur effective nL de la cavité du laser est très voisine de $1,5 \text{ m}$.

(II.2.a) Déterminer l'écart fréquentiel $\delta\nu$ entre deux modes consécutifs et vérifier que le laser a un fonctionnement *monomode*.

(II.2.b) On veut accorder le laser sur la fréquence d'une raie d'absorption ν connue à $\pm 5 \text{ MHz}$ près et comprise dans la zone de fonctionnement du laser.

- Montrer qu'il est possible de faire fonctionner le laser à la fréquence ν en modifiant légèrement la longueur effective L de la cavité puis déterminer l'amplitude maximale $\delta(nL)$ de la variation de nL nécessaire pour réaliser cet accord.

- Quel type d'actionneur permet usuellement de réaliser des déplacements de cet ordre ?

(II.2.c) On veut que les fluctuations de la fréquence émise par le laser restent inférieures à 5 MHz.

- Dans ce cas, quelle est la valeur maximale admissible pour la fluctuation de la longueur effective nL ?
- Comment peut-on stabiliser la fréquence du faisceau laser à une valeur proche de ν ?

(II.3) On dispose maintenant d'un laser *bimode*. La longueur effective nL de la cavité du laser est toujours égale à 1,5 m et les deux modes sont supposés parfaitement monochromatiques, de fréquences très voisines de $\nu_0 = 5 \times 10^{14}$ Hz, et de même intensité I_0 à la sortie du laser. Le faisceau sortant est analysé par un photodétecteur rapide, dont le temps de réponse est de l'ordre de 1 ns.

- Déterminer l'expression $u(t)$ du signal électrique délivré par ce photodétecteur.
- Reprendre ce calcul pour un photodétecteur dont le temps de réponse est de l'ordre de la microseconde.

(II.4) Le faisceau issu du laser (toujours tel que $nL = 1,5$ m) contient un nombre quelconque (entier) N de modes, de fréquences $p \times \delta\nu$, où p est un nombre entier positif allant de p_1 à $p_2 = p_1 + N - 1$. Ces modes sont supposés parfaitement monochromatiques et de même intensité I_0 à la sortie du laser. Les phases à l'origine des différents modes sont aléatoires et n'ont aucune relation entre elles. On posera φ_{pq} le déphasage à $t = 0$ entre les modes repérés par les indices p et q .

- Déterminer l'allure de l'intensité mesurée par un photodétecteur rapide, dont le temps de réponse est inférieur à la nanoseconde, puis par un photodétecteur à réponse lente.

(II.5) Avec un milieu amplificateur solide, il est possible d'exciter un très grand nombre de modes de la cavité du laser. On réalise ainsi un laser *multimode*, émettant sur N modes dont les longueurs d'ondes s'échelonnent de $\lambda_2 = 760$ nm à $\lambda_1 = 865$ nm. Les fréquences des modes s'échelonnent de $p_1 \times \delta\nu$ à $p_2 \times \delta\nu$ et on suppose à nouveau tous les modes parfaitement monochromatiques et de même intensité I_0 à la sortie du laser. La longueur effective nL de la cavité est toujours égale à 1,5 m.

(II.5.a) Déterminer numériquement des valeurs approchées de p_1 , p_2 et de N .

(II.5.b) Par un procédé non décrit ici, qui repose sur une dépendance de l'indice de réfraction n avec l'intensité lumineuse, on arrive à synchroniser tous les modes entre eux. Un tel laser est appelé *laser à modes bloqués*. Par un choix convenable de l'origine des temps, on peut poser dans le faisceau sortant, pour le mode repéré par l'indice p :

$$s_p = s_0 \cos(p\delta\omega t), \text{ soit en notation complexe } \underline{s}_p = s_0 \exp(ip\delta\omega t). \quad (15)$$

- Quelle est la valeur maximale de s , amplitude totale du champ émis par le laser ?
- À quels instants t cette amplitude maximale est-elle atteinte ? On fera un raisonnement simple, sans chercher à déterminer l'expression de $s(t)$ et on exprimera ces valeurs de t en fonction des paramètres n , L , c et d'un nombre entier q .

(II.5.c) Un calcul non demandé aboutit à l'expression suivante pour l'amplitude totale du champ à la sortie du laser :

$$s(t) = G(t) \cos(\omega_0 t) \quad (16)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{p_1 + p_2}{2} \delta\omega \quad \text{et} \quad G(t) = s_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)}. \quad (17)$$

- Déterminer à partir de cette expression le maximum de $|G(t)|$ et les instants t auxquels ce maximum est atteint.
- Tracer très schématiquement l'allure de $G(t)$ puis $s(t)$, sans chercher à en donner une représentation exacte.
- Déterminer la largeur Δt des pics principaux de $G(t)$, définie par l'écart entre les deux valeurs de t qui encadrent un maximum et pour lesquelles $G(t)$ s'annule.
- Déterminer numériquement la durée Δt des impulsions et leur fréquence de répétition ν_{imp} .
Quel est l'ordre de grandeur du nombre de périodes à l'intérieur d'une impulsion ? Commenter.

— Troisième partie —

III Métrologie des fréquences optiques

- (III.1) Décrire brièvement une méthode de mesure de la fréquence d'une onde lumineuse, reposant sur la détermination de sa longueur d'onde.
- (III.2) On connaît avec précision la fréquence ν_1 d'une onde émise par un laser monomode qu'il est possible de relier à celle fixée d'une transition atomique (cf. question II.2). Il est possible de mesurer très précisément la fréquence ν_2 , a priori inconnue mais voisine de ν_1 , d'un autre faisceau laser grâce au montage représenté sur la figure 6.
- Expliquer le principe de la méthode. Si le détecteur a un temps de réponse τ_R de 1 ns, estimer la plage de fréquences accessible à une telle mesure.

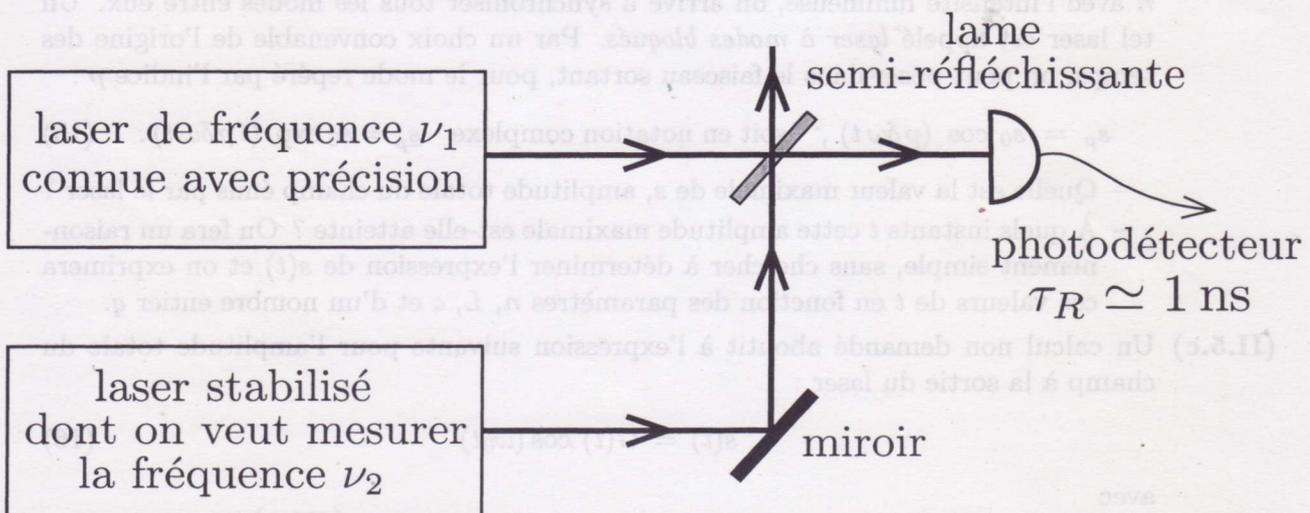


Figure 6: Mesure de la fréquence ν_2 d'un laser en se référant à un laser monomode de fréquence ν_1 connue.

(III.3) Les lasers à modes bloqués émettant des impulsions ultra-courtes (*cf.* question II.5) ont récemment permis de développer des méthodes de mesure de fréquence optique par comparaison **directe** avec un étalon de fréquence pourtant très éloigné dans le domaine spectral, comme par exemple une horloge atomique délivrant un signal hyperfréquence.

Reprenons l'expression de l'amplitude de l'onde issue du laser à modes bloqués :

$$s(t) = s_0 \frac{\sin\left(\frac{N\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)} \cos(\omega_0 t) \quad (18)$$

qui correspond à la superposition de N modes synchrones d'oscillation du laser.

(a) L'onde émise par cette source laser ultra-courte est détectée au moyen d'un photodétecteur dont le temps de réponse τ_R est de 1 ns.

- Un tel photorécepteur peut-il résoudre temporellement des impulsions lumineuses dont la cadence de répétition correspond à une fréquence $\nu_{\text{imp}} = 100$ MHz ?
- Le compteur d'impulsions lumineuses, étalonné à partir d'une horloge dans le domaine des hyperfréquences, pilote une cale piézo-électrique qui ajuste la longueur effective nL de la cavité pour que la cadence de répétition des impulsions soit $\nu_{\text{imp}} = (100\,000\,000 \pm 1)$ Hz.

Avec quelle précision doit-on maintenir la longueur effective nL constante pour assurer la stabilité à 1 Hz près de la cadence de répétition ν_{imp} des impulsions ?

(b) On souhaite mesurer avec une très grande précision la fréquence ν d'un laser continu à émission monomode. Un dispositif interférométrique permet de mesurer cette fréquence avec une précision de ± 40 MHz, donnant comme résultat :

$$\nu = (385\,285\,140 \pm 40) \text{ MHz}.$$

Par ailleurs, ν peut s'exprimer avec ν_{imp} comme unité :

$$\nu = p_0 \times \nu_{\text{imp}} + \eta \times \nu_{\text{imp}} \quad \text{avec } p_0 \text{ entier et } |\eta| < 0,5. \quad (19)$$

Déterminer les deux valeurs de p_0 compatibles avec cette mesure. *entachés de son erreur.*

(c) Si on suppose p_0 connu exactement, il reste alors, pour connaître précisément la fréquence ν du laser, à mesurer la différence $(\nu - p_0 \times \nu_{\text{imp}}) = \eta \times \nu_{\text{imp}}$. On utilise pour cela le montage représenté schématiquement sur la figure 7.

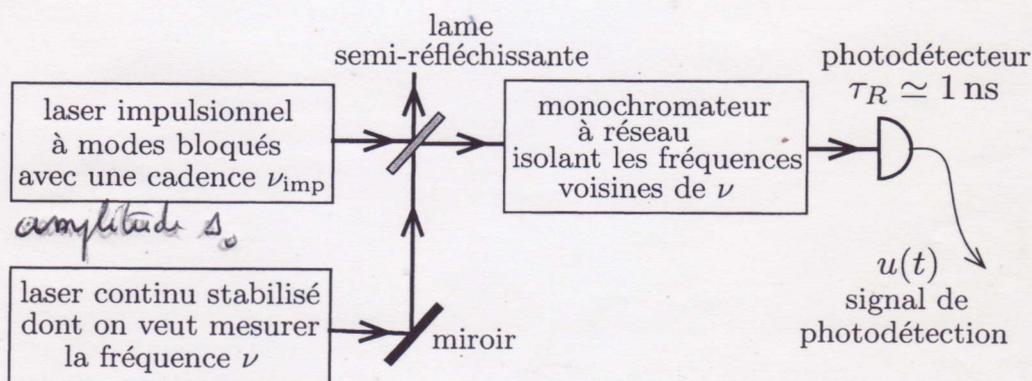


Figure 7: Comparaison de fréquences entre un laser stabilisé et un laser impulsionnel à modes bloqués. On rappelle que le photodétecteur délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à l'intensité $I(t)$ qu'il mesure sur le faisceau lumineux détecté.

- Le monochromateur ne laisse passer que les ondes monochromatiques dont la fréquence est comprise entre les deux valeurs $(p_0 - \frac{1}{2}) \times \nu_{\text{imp}}$ et $(p_0 + \frac{1}{2}) \times \nu_{\text{imp}}$. Justifier que $u(t)$ est un signal périodique et donner sa période.
- En fait, le monochromateur laisse passer une bande de fréquence bien plus large. Comment traiter le signal électrique $u(t)$ délivré par le photodétecteur pour conserver uniquement la partie permettant de mesurer $(\eta \times \nu_{\text{imp}})$?

(d) Applications numériques.

Pour l'onde décrite à la question (III.3.c), le photodétecteur délivre un signal $u(t)$ dont les composantes harmoniques de plus basse fréquence sont à (30 ± 1) MHz et (70 ± 1) MHz.

- Déterminer les deux valeurs possibles de la fréquence ν .
- Pour lever l'ambiguïté on modifie légèrement la longueur L de la cavité de façon à augmenter légèrement (de quelques Hz) la cadence de répétition ν_{imp} des impulsions laser. Les deux composantes harmoniques de plus basse fréquence passent alors à (22 ± 1) MHz et (78 ± 1) MHz. En déduire la valeur de la fréquence ν ainsi que l'incertitude sur cette mesure.
- Quel est le gain en précision par rapport à la première mesure interférométrique ?

L'invention par Theodor W. HÄNSCH et John L. HALL de cette méthode des "peignes de fréquences optiques" leur a valu le Prix Nobel de Physique 2005.

— o —

FIN DE L'ÉPREUVE

— o —

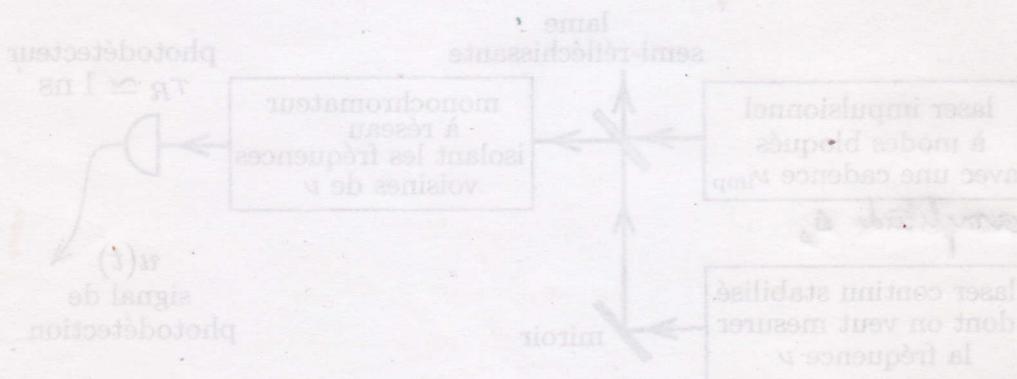


Figure 7. Comparaison de fréquences entre un laser stabilisé et un laser impulsionnel à modes bloqués. On rappelle que le photodétecteur délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à l'intensité $I(t)$ qu'il mesure sur les faisceaux lumineux détectés.

I.1.a) L'atome est supposé isolé \rightarrow son réfé. barycentrique est galiléen $\rightarrow G$ est fixe (initialement il l'est)
 Puis que $(Oxyz)$ soit galiléen, il faut que O soit fixe aussi.

$\rightarrow O \approx G \rightarrow m_{\text{noyau}} \gg m_e$

I.1.b) $\mathcal{E} = E_c + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2$
 $k = m \omega_0^2 \quad \vec{v} = -A \omega_0 \sin \omega_0 t \hat{z} \quad x = A \cos \omega_0 t$
 $\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2$

I.2.a) $\psi = e x = e A(t) \cos(\omega_0 t)$

Δ aprx: $A(t)$ ayant une durée caract. d'évolution $\gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\Rightarrow \dot{A}$ et \ddot{A} négligeables / autres termes

$\rightarrow \ddot{\psi} = -e A(t) \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \rightarrow \ddot{\psi}^2 = e^2 A^2 \omega_0^4 \cos^2 \omega_0 t \rightarrow \langle \Phi \rangle = \frac{\mu_0 e^2 A^2 \omega_0^4}{6\pi c} \frac{1}{2}$

I.2.b) Cons. de l'énergie: le dipôle rayonne et donc perd de l'énergie: $-\langle \Phi \rangle dt = d\mathcal{E}$

pour avoir eq. diff. sur \mathcal{E} , il faut remplacer $\langle \Phi \rangle$, donc A^2 par \mathcal{E} (à un facteur près)

soit $\langle \Phi \rangle = \frac{\mu_0 e^2 \omega_0^4}{6\pi c} \frac{2\mathcal{E}}{m \omega_0^2} = \frac{\mu_0 e^2 \omega_0^2}{6\pi c m} \mathcal{E}$

$\rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\mathcal{E}}{\tau_0} = 0$ avec $\tau_0 = \frac{6\pi c m}{\mu_0 e^2 \omega_0^2}$

I.2.c) $\langle \Phi \rangle = \frac{E_{\text{emis}}}{\tau_0} = \frac{h\nu}{\tau_0}$ car la durée caract. du train d'onde est τ_0

onde électromag. plane: $\pi = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \Rightarrow \Phi = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2$
 $\langle \Phi \rangle = \pi \times 4\pi r^2$

$\Rightarrow E_0 = \left(\frac{\mu_0 c h \nu}{2\pi r^2 \tau_0} \right)^{\frac{1}{2}}$

remplacer τ_0 (cf I.2.b) $\rightarrow E_0 = \frac{\mu_0 e \omega_0}{2\pi r} \sqrt{\frac{h\nu}{3m}}$

I.2.d) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{9192631770} \approx 3 \text{ cm}$

$\tau_0 = \frac{6\pi c m}{\mu_0 e^2 (2\pi f)^2} = \frac{3 \times 3 \cdot 10^8 \times 9,11 \cdot 10^{-31}}{2\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (9192631770)^2} = 48 \text{ s}$

Pour un atome émettant ds le visible $\{\lambda \sim 600 \text{ nm}\} \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$

$\tau_{\text{visible}} = \tau_{\text{dipole}} \left(\frac{f_{\text{dipole}}}{f_{\text{atome}}} \right)^2 = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

$E_{\text{visible}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2\pi \cdot 0,5 \cdot 10^{15}}{2\pi \cdot 1} \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5 \cdot 10^{15}}{3 \times 9,11 \cdot 10^{-31}}} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ Vm}^{-1}$

I.3.a) $s = \int_{-\infty}^{+\infty} B \left[\frac{1}{1+C(\omega-\omega_0)^2} + \frac{1}{1+C(\omega+\omega_0)^2} \right] e^{i\omega t} d\omega$

$\int \frac{e^{i\omega t}}{1+C(\omega-\omega_0)^2} d\omega = e^{i\omega_0 t} \int \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{1+\sqrt{C}(\omega-\omega_0)^2} d(\omega-\omega_0) = e^{i\omega_0 t} \frac{\pi}{\sqrt{C}} e^{-\frac{|t|}{\sqrt{C}}}$

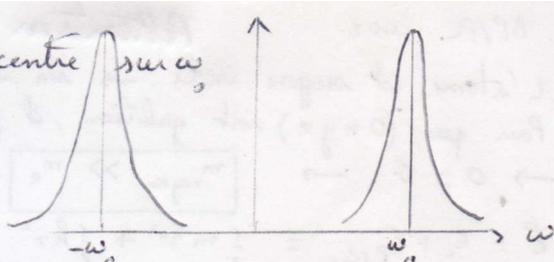
d'où $\int \frac{e^{i\omega t}}{1+C(\omega+\omega_0)^2} d\omega = e^{-i\omega_0 t} \frac{\pi}{\sqrt{C}} e^{-\frac{|t|}{\sqrt{C}}}$ (il suffit de changer le signe de ω_0)

$\rightarrow s = \frac{B\pi}{\sqrt{C}} e^{-\frac{|t|}{\sqrt{C}}} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] = \frac{B\pi}{\sqrt{C}} e^{-\frac{|t|}{\sqrt{C}}} 2 \cos \omega_0 t$

$\rightarrow s_0 e^{-\frac{|t|}{\sqrt{C}}} \cos \omega_0 t = \frac{B\pi}{\sqrt{C}} e^{-\frac{|t|}{\sqrt{C}}} 2 \cos \omega_0 t \rightarrow \begin{cases} C = \tau^2 \\ B = \frac{s_0 \sqrt{C}}{2\pi} = \frac{s_0 \tau}{2\pi} \end{cases}$

$$\frac{1}{1+C(\omega-\omega_0)^2}$$

ressemble à un pic centre sur ω_0



I3 b) Ainsi on est arrivé à $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B \left[\frac{1}{1+C(\omega-\omega_0)^2} + \frac{1}{1+C(\omega+\omega_0)^2} \right] d\omega e^{i\omega t}$ d'après (5) et (7)

on remarque que le 1^{er} terme convient puisque de la forme de $F(\omega)$ proposée en (9)
Par contre le 2ⁱ ne convient pas. Mais comme il faut transformer $e^{i\omega t}$ en $\cos \omega t$
on peut penser à inverser ω en posant une nouvelle variable $\omega' = -\omega$
Alors le 2ⁱ terme se transforme en $\int_{+\infty}^{-\infty} B \frac{1}{1+C(\omega'-\omega_0)^2} (-d\omega') e^{-i\omega' t}$

Ainsi $s(t) = B \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\omega t}}{1+C(\omega-\omega_0)^2} + \frac{1}{1+C(\omega-\omega_0)^2} e^{-i\omega t} d\omega \right)$ (ω' est une variable muette au m^{ême} titre que ω)

$$\rightarrow \left[s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2B \cos \omega t}{1+C(\omega-\omega_0)^2} d\omega \right] \quad \left[D = 2B = \frac{A_0 \tau}{\pi} \right]$$

? peut être une réponse lue de PC Olivier Cours page 45 notes en bas de la page
La largeur spectrale est typ. évaluée sur la partie positive du spectre correspondant aux pulsations positives. En effet en notation réelle les pulsations ω et $-\omega$ sont engendrées toutes les deux par $2 \cos \omega t = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}$

\rightarrow $F(\omega) = \frac{D}{1+C(\omega-\omega_0)^2} = \frac{D}{2}$ pour $\sqrt{C|\omega-\omega_0|} = 1$, comme $C = \tau^2 \rightarrow \Delta\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\tau} \rightarrow \Delta\omega_{\frac{1}{2}} \approx \frac{2}{\tau}$

Comme $\omega = 2\pi\nu \rightarrow \Delta\nu = \frac{\Delta\omega_{\frac{1}{2}}}{2\pi} = \frac{1}{\pi\tau}$

I3 c) $C_0 : \Delta\nu_{C_0} = \frac{1}{\pi\tau} = \frac{1}{\pi \cdot 48} = 0,006 \text{ Hz}$

Atome de la visible : $\Delta\nu_{\text{atome visible}} = \frac{1}{\pi\tau} = \frac{1}{\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-8}} \approx 20 \text{ MHz}$

Long. de cohérence visible : $L_{\text{coh}} = c\tau = \frac{3 \cdot 10^8}{\pi \cdot 20 \cdot 10^6} = 5 \text{ m}$

Cela paraît une très grande valeur pour nos mesures en TP. En réalité il y a certainement d'autres causes d'élargissement spectral.

I4 a) $s(D, t) = s_0 \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{OD}{c} \right) \right]$ représente l'amplitude qui avait lieu en O à $t - \frac{OD}{c}$ du au retard de propagation

$s(D, t) \stackrel{v}{=} s_0 \cos \varphi(t) = s_0 \cos \omega t$ car D voit un signal de pulsation ω
 $s(D, t+dt) = s_0 \cos \varphi(t+dt) = s_0 \cos(\omega(t+dt))$

$\rightarrow \omega t = \varphi$
 $\omega(t+dt) = \varphi + d\varphi \rightarrow \omega dt = d\varphi \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$

$dOD = O'D - OD = \sqrt{(vdt)^2 + OD^2} - 2vdt \cdot OD \cdot \cos \alpha - OD \approx OD \left(1 - \frac{vdt \cos \alpha}{OD} \right) - OD = -vdt \cos \alpha$

$\rightarrow \boxed{\frac{dOD}{dt} = -v \cos \alpha}$

$\varphi = \omega_0 \left(t - \frac{OD}{c} \right) \rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c} \frac{dOD}{dt} = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right)}$

rq si $\alpha = 0$ alors $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) > \omega_0$ ce qui est normal lorsque la source s'approche du récepteur (effet doppler)

I4.b) Par simple analyse dimensionnelle on peut prévoir $\Delta\nu \sim v_0 \frac{\Delta v_x}{c}$

• Ou bien en utilisant la question précédente : $\omega = \omega_0 (1 + \frac{v \cos \alpha}{c}) \rightarrow \nu = \nu_0 (1 + \frac{v \cos \alpha}{c})$
 cf fig 4a) $v \cos \alpha = v_x \rightarrow \nu = \nu_0 (1 + \frac{v_x}{c}) \rightarrow d\nu = \nu_0 \frac{dv_x}{c} \rightarrow \Delta\nu = \nu_0 \frac{\Delta v_x}{c}$

I4.c) GP Monoat $\rightarrow e_c = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} kT \rightarrow u = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

• u correspond aux 3 degrés de liberté possibles $u^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 3 v_x^2 \rightarrow u = \sqrt{3} \langle v_x \rangle$
 • équiprobabilité dans les 3 directions x, y, z

$\rightarrow u_x = \frac{u}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$

• L'effet de vitesse v (déplacement de la source) est dû à l'agitation thermique
 Si on considère que Δv_x correspond aux particules allant vers la source et celles s'éloignant de la source, alors $\Delta v_x = 2u_x = 2\sqrt{\frac{kT}{m}}$

$\rightarrow \Delta\nu_{\text{Doppler}} = \nu_0 \frac{2u_x}{c} = \frac{\nu_0}{c} 2\sqrt{\frac{kT}{m}} = 0,5 \cdot 10^{15} \times \frac{2}{3 \times 10^8} \sqrt{\frac{8,31 \times 10^3}{0,2}} = 670 \text{ MHz}$

$\frac{h\nu}{m} = \frac{R}{\pi}$

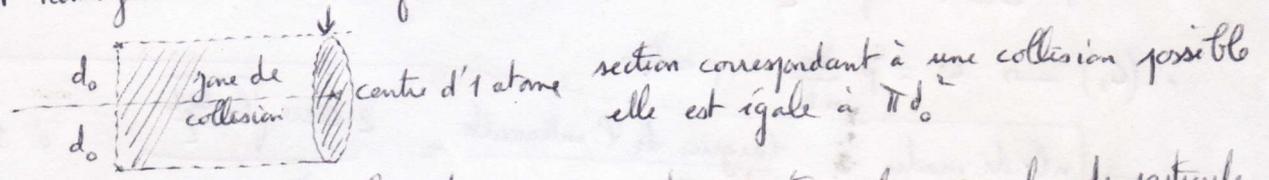
$\rightarrow L_{\text{coh}} = \frac{c}{\Delta\nu_{\text{Doppler}}} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{670 \cdot 10^6} \approx 40 \text{ cm}$

• $\Delta\nu_{\text{Dop}} (\text{étalon}) = \frac{9192631770 \times 2}{3 \times 10^8} \sqrt{\frac{8,31 \times 300}{0,133}} = 8390 \text{ Hz}$

• Δ (Etalon = Cs) donc pour une pair Cs on souhaite $\Delta\nu_{\text{Dop}} \text{ étalon} = 100 \text{ Hz} \rightarrow T_{\text{souhaitée}} = T \left(\frac{\Delta\nu_{\text{souhaitée}}}{\Delta\nu} \right)^2 = 300 \left(\frac{100}{8390} \right)^2 = 43 \text{ mK}$

C'est difficile actuellement d'atteindre d'aussi basses T° .
 Or la précision avec laquelle la fréquence Cs est connue est à 10 Hz près. (cf I2d)
 ce qui nécessiterait de diviser encore la T° par 100.

I5a) σ est homogène à une surface



I5b) Cela paraît logique que l soit inversement proportionnel au nombre de particules par unité de volume $\rightarrow l$ varie comme $\frac{1}{n}$

• Analyse dimensionnelle $l = n^{-1} \sigma^{\beta}$ soit $L \sim V \cdot \sigma^{\beta}$ soit $L \sim L^3 L^{2\beta}$
 $\rightarrow 1 = 3 + 2\beta \rightarrow \beta = -1$
 $\rightarrow l = \frac{1}{n\sigma}$

I5c) • $l = u \tau_{\text{coll}}$ et $u = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ monoat $\rightarrow \tau_{\text{coll}} = l \sqrt{\frac{m}{3kT}} \Rightarrow \tau_{\text{coll}} = \frac{1}{n\sigma} \sqrt{\frac{m}{3kT}} = \frac{RT}{10^8 \sigma} \sqrt{\frac{\pi}{3RT}} = \frac{1}{10^8 \sigma} \sqrt{\frac{\pi RT}{3}}$
 • $\nu = NkT \rightarrow \nu = nkT \rightarrow n = \frac{\nu}{kT} = \frac{10^8}{RT}$
 cf I3b $\rightarrow \Delta\nu_{\text{coll}} = \frac{1}{\pi \tau_{\text{coll}}} = \frac{10^8 \sigma}{\pi} \sqrt{\frac{3}{\pi RT}}$

I5d) $\Delta\nu_{\text{coll}} = \frac{3 \cdot 10^5 \times 6,02 \times 10^{23} \times \pi \times (5 \times 10^{-10})^2}{\pi} \sqrt{\frac{3}{0,2 \times 8,31 \times 10^3}} = 1,9 \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad (1,9 \text{ GHz})$

C'est énorme ! les collisions donnent l'élargissement du spectre le + important
 car $d = \sigma_0$ correspond à une distance interatomique

II 1.a) Pour obtenir une amplitude qui croisse dans la direction de propog page 9
il faut que $\alpha(\omega) > 0$

II 1.b) Conditions limites : $\text{coef}^+ r = 1$ pour $M_1 : \underline{s}^+(0,t) = \underline{s}^-(0,t)$
 $\text{coef}^+ r = 1-\epsilon$ pour $M_2 : \underline{s}^+(L,t) = \frac{1}{1-\epsilon} \underline{s}^-(L,t)$

$$\rightarrow \begin{cases} \underline{a}^+ e^{(\alpha-ik)x_0} = \underline{a}^- e^{(\alpha+ik)x_0} \\ \underline{a}^+ e^{(\alpha-ik)L} = \frac{1}{1-\epsilon} \underline{a}^- e^{(\alpha+ik)L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{a}^+ = \underline{a}^- \\ e^{(\alpha-ik)L} (1-\epsilon) = e^{(\alpha+ik)L} \end{cases}$$

Egalité partie réelle, partie imaginaire $\rightarrow \begin{cases} (1-\epsilon)e^{\alpha L} = e^{-\alpha L} & (C_2) \text{ sous-entendu } \cos kL \neq 0 \\ (1-\epsilon)e^{\alpha L} = -e^{-\alpha L} & \text{sous-entendu } \sin kL \neq 0 \end{cases}$

les 2 conditions $\cos kL \neq 0$ et $\sin kL \neq 0$ conduisent à 2 relations inverses (opposées) \rightarrow impossible
Comme manifestement la 2^e égalité est impossible mathématiquement à cause du signe
car $(1-\epsilon)e^{\alpha L} > 0$ et $e^{-\alpha L} > 0$, c'est que $\sin kL = 0$

\rightarrow en résumé $\sin kL = 0$ c'ad $kL = p\pi$ ou $\frac{2\pi n L}{\lambda} = p\pi$ ou $L = \frac{p\lambda}{2n} (C_1)$
et $(1-\epsilon)e^{\alpha L} = e^{-\alpha L}$ ou encore $(1-\epsilon)e^{2\alpha L} = 1 (C_2)$

II 1.c) Pour une onde donnée, c'ad α et λ donnés, comme ϵ est un paramètre donné,
il faut ajuster L pour satisfaire (C_2) . Il n'est pas alors certain de trouver
un entier p satisfaisant pile (C_1) . (car n est une donnée aussi)
rq : si $\epsilon \ll 1$ alors, comme $1-\epsilon = e^{-2\alpha L}$ c'est que $2\alpha L \ll 1$ et $e^{-2\alpha L} = 1 - 2\alpha L$ d'où $\epsilon = 2\alpha L$
Pour l'instant on montre une amplification d'amplitude ce qui ne conduit pas à un
rég. permanent. Il faut donc une atténuation. On peut penser au multivibrateur
astable

II 1.d) Il faut satisfaire $\alpha = \alpha_0 e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$ et $2\alpha L \geq \epsilon$
Eliminons $\alpha \rightarrow 2\alpha_0 e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} L \geq \epsilon \rightarrow e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} \geq \frac{\epsilon}{2\alpha_0 L}$
Dans les valeurs num on connaît $\alpha_0 L$ et ϵ

$$\rightarrow \left| \frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega} \right| \leq \sqrt{\ln \frac{2\alpha_0 L}{\epsilon}} \rightarrow \omega \in \left[\omega_0 - \Delta\omega \sqrt{\ln \frac{2\alpha_0 L}{\epsilon}} ; \omega_0 + \Delta\omega \sqrt{\ln \frac{2\alpha_0 L}{\epsilon}} \right]$$

$(C_1) \rightarrow \omega = p \frac{\pi c}{nL}$ p entier

$$\rightarrow \text{nb de modes} = \frac{\text{largeur de l'intervalle}}{\frac{\pi c}{nL}} = \frac{2\Delta\omega \sqrt{\ln \frac{2\alpha_0 L}{\epsilon}}}{\frac{\pi c}{nL}} \text{ à } \pm 1 \text{ près}$$

AN : $\text{nb de modes} = \frac{2 \times 2\pi \times 500 \times 10^6 \times 1,5}{\pi \times 3 \times 10^8} \sqrt{\ln \frac{2 \times 2 \times 10^{-2}}{0,01}} = 11,8$

on aura donc 11 ou 12 modes possibles

II 2.a) $(C_1) \omega = p \frac{\pi c}{nL}$ ou comme $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = \frac{p c}{2nL} \rightarrow \delta\nu = \frac{c}{2nL}$ entre 2 valeurs de p

AN $\delta\nu = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \times 1,5} = 10^8 \text{ s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$

or la largeur de l'intervalle est de $2 \times 40 = 80 \text{ MHz}$ ~~est~~ ce qui n'autorise qu'un seul mode

II 2.b) $\nu = p \frac{c}{2nL}$ p entier ; on peut modifier légèrement ν en modifiant légèrement L (α p constant)
en effet $\delta\nu = -\frac{\delta(nL)}{nL} \nu \rightarrow \delta(nL) = -\frac{nL}{\nu} \delta\nu = -\frac{2(nL)^2 \delta\nu}{p c}$

AN : $p = \frac{\nu_0 2nL}{c} = \frac{5 \cdot 10^{14} \times 2 \times 1,5}{3 \cdot 10^8} = 5 \cdot 10^6$
 $\delta(nL) = -\frac{2(1,5)^2 (5 \cdot 10^6)^2 \cdot 10^8}{(5 \cdot 10^6)^2 \cdot 3 \cdot 10^8} = -0,015 \mu\text{m} = -15 \text{ nm}$

13*) La distinction des 2 questions est la constante de temps du détecteur.
 le premier est rapide : on va donc sommer les amplitudes
 le second est lent : on va alors sommer les intensités

1^{er} détecteur : (rapide) $s = s_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + s_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ ou bien $s = s_0 (e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)})$
 $\rightarrow s s^* = s_0^2 (1 + 1 + 2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2))$
 $\rightarrow I = K s s^* = K_0 2 s_0^2 (1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2))$ si temps de réponse rapide

2^{er} détecteur : (lent) idem mais il faut prendre la moyenne $\langle s s^* \rangle$ et alors
 $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle = 0 \rightarrow I = 2 K s_0^2 = 2 I_0$ ce qui revient à ajouter les intensités

II 4) $s = \sum s_p e^{j(p \delta \nu 2\pi t + \varphi_p)} = s_0 (e^{j(\varphi_1 + 2\pi \delta \nu t + \varphi_1)} + e^{j(\varphi_2 + 2\pi \delta \nu t + \varphi_2)} + \dots)$
 $I = K s_0^2 (N + \sum_{i \neq j} 2 \cos[2\pi \delta \nu t (\nu_j - \nu_i) + \varphi_j - \varphi_i])$ pour détecteur rapide
 $I = N K s_0^2$ pour détecteur lent

II 5a) Comme l'énoncé ne donne pas n, je suppose que les valeurs de λ sont celles dans le vide
 $\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \Delta \nu = c \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 3 \cdot 10^8 \left(\frac{1}{760} - \frac{1}{865} \right) 10^9 = 4,8 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$
 $N = \frac{\Delta \nu}{\delta \nu}$ avec $\delta \nu$ du II 2a $\rightarrow N = \frac{4,8 \cdot 10^{13}}{10^8} = 4,8 \cdot 10^5 !!$ énormément de modes
 $\nu_i = \nu_1 \delta \nu \Rightarrow \nu_i = \frac{\nu_1}{\delta \nu} = \frac{c}{\lambda_1 \delta \nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{865 \cdot 10^{-9} \cdot 10^8} = 3,46 \cdot 10^6$
 $\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2 \delta \nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{760 \cdot 10^{-9} \cdot 10^8} = 3,95 \cdot 10^6$

II 5b) La valeur max de s quand tous les s_p sont en phase $\rightarrow s_{\text{max}} = N s_0$
 $\forall p$ il faut $p \delta \omega t = 2m\pi$ m entier soit $\delta \omega t = 2m_1 \pi$ m_1 entier
 $2 \delta \omega t = 2m_2 \pi$ m_2 entier
 $3 \delta \omega t = 2m_3 \pi$ m_3 entier etc
 Pour tout entier m, cela couvrirait pour les autres c'à d m_2, m_3, \dots etc seraient aussi entiers
 $\rightarrow t = \frac{2\pi}{\delta \omega} \cdot q$ q entier $t = q \frac{2\pi n l}{rc} = q \frac{2nl}{c}$
 avec $\delta \omega = 2\pi \delta \nu$ et $\delta \nu = \frac{c}{2nl}$ (II 2a) $\Rightarrow t = q \frac{2nl}{c}$ q entier

II 5c) On reconnaît pour $G(t)$ la forme d'intensité d'un réseau
 G est max pour $\sin \frac{\delta \omega t}{2} = 0$ car alors $\sin \frac{N \delta \omega t}{2} = 0$ aussi et $G = s_0 N$
 Cela arrive à $t = q \cdot \frac{2\pi}{\delta \omega}$ q entier

(est-ce que $N \delta \omega = \omega_0$?)

$\Delta t = \frac{4\pi}{N \delta \omega}$ largeur d'1 pic principal AN $\Delta t = \frac{4\pi}{4,8 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 10^8} = 42 \text{ fs}$
 $\Delta t_{\text{entre impulsions}} = \frac{2\pi}{\delta \omega} \rightarrow \nu_{\text{imp}} = \frac{\delta \omega}{2\pi}$ AN $\nu_{\text{imp}} = \frac{2\pi c}{2\pi 2nl} = \frac{c}{2nl} = 100 \text{ THz}$

nb périodes dans une impulsion : $\frac{\Delta t}{T_0} = \frac{4\pi}{N \delta \omega} = \frac{2 \omega_0}{N \delta \omega} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 5 \cdot 10^{14}}{4,8 \cdot 10^5 \cdot 2\pi \cdot 10^8} = 20 \text{ à } 21$
 (avec $\frac{\Delta t_{\text{entre impulsions}}}{T_0}$ on trouve bien plus $\frac{\omega_0}{\delta \omega} \sim 10^6$)

III 1) TP mesure de λ par le prisme au goniomètre (ou par le réseau) page 6

III 2) Principe d'interférométrie pour 2 ondes de fqe très voisine et détectées par un détecteur rapide ($\tau_R \sim 1\text{ns}$)

Pour ne pas moyenner le signal, il faut que $\tau_R < \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$ car le terme d'interférence est en $\cos((\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1)$

Il faut donc que la fréquence $\nu_2 \approx \nu_1 \pm \Delta\nu$ avec $\Delta\nu \ll \frac{1}{\tau_R}$ c'ad $\Delta\nu \ll \frac{1}{10^{-9}} = 1\text{GHz}$

III 3) a). $100\text{MHz} = 10^8 \ll 10^9\text{Hz}$ inférieur à $\frac{1}{\tau_R}$.

Le photodétecteur rapide à $\tau_R = 1\text{ns}$ peut résoudre des impulsions lumineuses dont la cadence de répétition correspond à $\nu_{\text{imp}} = 100\text{MHz}$

cf II 2. b) $\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{\delta(nL)}{nL}$ AN: $\left| \frac{\delta(nL)}{nL} \right| = \left| \frac{\delta\nu}{\nu} \right| = \frac{1}{10^8} = 10^{-8}$

III 3) b) $\nu = \nu_0 \nu_{\text{imp}} + \eta \nu_{\text{imp}}$ AN $\rightarrow 385\,285\,140.6 = \nu_0 \times 10^8 + \eta \cdot 10^8$

AN: $\nu \in [385\,285\,100, 385\,285\,180]$

$385\,285,1 \times 10^8 = \nu_0 \cdot 10^8 + \eta \cdot 10^8$

$385\,285,1,8 = \nu_0 + \eta$

$\Rightarrow \nu_0 = 385\,285,1$ et $\eta = 0$
 $\nu_0 = 385\,285,2$ et $\eta = -0,2$

III 3) c) cf II 5 b) pour la déf du laser à modes bloqués: $s = s_0 \cos(p\omega_0 t)$

Voici ce qu'envoie le laser à modes bloqués de cadence ν_{imp} : $s = \sum s_0 e^{ip\omega_0 t} = \sum s_0 e^{ip2\pi\nu_{\text{imp}} t}$

Sortie du laser contenu stabilisé: $s' = s e^{i(\omega_0 + \eta)\nu_{\text{imp}} t}$ avec $\nu = (p_0 + \eta)\nu_{\text{imp}}$
 ou $s' = s_0 e^{i(2\pi(p_0 + \eta)\nu_{\text{imp}} t + \varphi)}$

Le monochromateur reçoit donc $s + s' = s_0 \left[\sum e^{ip2\pi\nu_{\text{imp}} t} + e^{i(2\pi(p_0 + \eta)\nu_{\text{imp}} t + \varphi)} \right]$

Le monochromateur ne laisse passer que entre $(p_0 - \frac{1}{2})\nu_{\text{imp}}$ et $(p_0 + \frac{1}{2})\nu_{\text{imp}}$

$\rightarrow s_{\text{sortie}}(t) = s_0 \left(e^{ip_0 2\pi\nu_{\text{imp}} t} + e^{i(2\pi(p_0 + \eta)\nu_{\text{imp}} t + \varphi)} \right) = s_0 e^{ip_0 2\pi\nu_{\text{imp}} t} \left(1 + e^{i2\pi(\eta)\nu_{\text{imp}} t + \varphi} \right)$

$u = K(s_{\text{sortie}})^2 = Ks_0^2 2(1 + \cos(2\pi\eta\nu_{\text{imp}} t + \varphi))$ signal périodique de période $\frac{1}{\eta\nu_{\text{imp}}}$
 rq: on a bien $\frac{1}{\eta\nu_{\text{imp}}} \gg \tau_R$

Le monochromateur laisse passer une bande + large: par exemple les modes $p_0 - 1, p_0, p_0 + 1$

$\rightarrow s_{\text{sortie}} = s_0 \left[e^{i(p_0 - 1)2\pi\nu_{\text{imp}} t} + e^{ip_0 2\pi\nu_{\text{imp}} t} + e^{i(p_0 + 1)2\pi\nu_{\text{imp}} t} + e^{i(2\pi(p_0 + \eta)\nu_{\text{imp}} t + \varphi)} \right]$

mettre $e^{ip_0 2\pi\nu_{\text{imp}} t}$ en facteur $\rightarrow s_{\text{sortie}} = s_0 e^{ip_0 2\pi\nu_{\text{imp}} t} \left[1 + 2\cos(2\pi\nu_{\text{imp}} t) + e^{i2\pi(\eta)\nu_{\text{imp}} t + \varphi} \right]$

$u = K(s_{\text{sortie}})^2 = Ks_0^2 (2 + 4\cos^2(2\pi\nu_{\text{imp}} t) + 4\cos(2\pi\nu_{\text{imp}} t) + 2\cos(2\pi\eta\nu_{\text{imp}} t + \varphi) + 4\cos(2\pi\nu_{\text{imp}} t)\cos(2\pi\eta\nu_{\text{imp}} t + \varphi))$

Si τ_R est suffisamment faible pour voir l'instantané de chacune de ces composantes alors il faudrait un passe-bas de fréquence de coupure $\leq \nu_{\text{imp}}$ mais il reste $(1 + \eta)\nu_{\text{imp}}$ ou bien un passe-bande très sélectif ou bien faire une analyse spectrale.

III 3) d) Avec $\eta < 0$ on aura $(1 + \eta)\nu_{\text{imp}} = (70 \pm 1)\text{MHz}$ et $|\eta|\nu_{\text{imp}} = (30 \pm 1)\text{MHz} \rightarrow \eta = -0,3 \pm 0,01$

Avec $\eta > 0$ on aura $(1 - \eta)\nu_{\text{imp}} = (70 \pm 1)\text{MHz}$ et $\eta\nu_{\text{imp}} = (30 \pm 1)\text{MHz} \rightarrow \eta = +0,3$

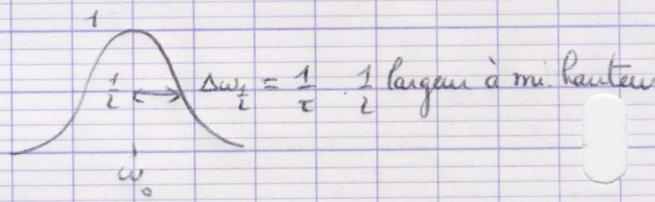
$\eta = -0,3 \pm 0,01 \rightarrow \nu = (385\,285,2 - 0,3) \cdot 100 = (385\,285\,170 \pm 1)\text{MHz}$

Gain en précision: on passe de $\frac{40}{385\,285\,140}$ à $\frac{1}{385\,285\,170}$ c'ad de 10^{-7} à $2,5 \cdot 10^{-9}$

Dans la 1^{ère} partie :

la largeur en τ

- La largeur naturelle en fréquence vient de $\frac{1}{\tau}$ du dipôle associé à l'atome qui émet. Cela veut dire que le dipôle aura une énergie suffisante pendant cette durée τ_0 .
Ainsi le Cs émet à $9\ 192\ 631\ 770$ Hz c'est à dire 3 GHz pendant 48 s c'est autour de 10^{15} Hz
alors que l'un atome émettant ds le visible (comme le Hg par ex) aura une ^{durée} long. de train d'onde de 10^{-8} s
note : cette durée τ_0 est inv^{er} prop. à la fréquence d'émission et proportionnelle à la masse de l'atome qui émet.

- La gaussienne $\frac{1}{1 + \tau^2(\omega - \omega_0)^2}$ est 

- Si on modélise un train d'onde par $e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t$ où τ représente le temp de vie du train d'onde alors le spectre de ce train d'onde est centré sur ω_0 à $\Delta\omega$ près où $\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}$.
Cela correspond à $\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}$

Plus τ est gd (durée du train d'onde) plus $\Delta\nu$ est petit
Ainsi Pour le Cs $\Delta\nu \approx 6$ mHz alors que pour at. visible $\Delta\nu \approx 10^{14}$ Hz
La long. de cohérence s'en déduit par $L_{coh} = c\tau$
Elle est de 10^3 mètre du mètre pour l'atome ds le visible

- l'effet Doppler dû à l'agitation thermique élargit le spectre en fréquence du train d'onde de façon considérable
- l'effet collisions entre atomes élargit le spectre en fréquence encore + considérablement.