

82.11P

SESSION 2008

Filière PC**PHYSIQUE PC1**

ENS de Paris

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Introduction

Le sujet de ce problème porte sur quelques phénomènes physiques observables lors de l'interaction entre des nanosphères métalliques et une onde électromagnétique. Des progrès significatifs au cours des dernières années ont permis de synthétiser de manière très contrôlée des particules métalliques de dimension allant de quelques nanomètres à quelques dizaines de nanomètres. Ces objets sont qualifiés de mésoscopiques. Ils peuvent se comporter quelquefois comme un morceau de métal classique et d'autres fois comme un objet microscopique. Ils sont en particulier bien plus petits que la longueur d'onde de la lumière qui généralement les sonde.

Les parties 1.1 et 1.2 étudient la propagation d'une onde électromagnétique dans le métal qui constitue les nanosphères et dans le milieu matériel qui les entoure. Elles sont indépendantes l'une de l'autre.

La partie 2 étudie l'absorption de l'onde incidente par un milieu comportant une fraction de nanosphères. Elle utilisera une partie des résultats obtenus précédemment.

Les parties 3.1 et 3.2 traitent de quelques effets thermiques et mécaniques que l'on peut observer suite à l'absorption de l'onde par les nanosphères. Elles peuvent être traitées indépendamment des résultats précédents.

Certains calculs numériques sont explicitement demandés. Les résultats devront être exprimés avec au moins 3 chiffres significatifs. Certaines questions demandent des candidats un raisonnement qualitatif qui devra être rédigé dans un français clair et correct.

Formulaire - Grandeurs physiques

Toutes les quantités vectorielles dans l'énoncé sont mises en **gras**.

On donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) &= \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ \operatorname{div}(f \mathbf{A}) &= f \operatorname{div}(\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}(f)\end{aligned}$$

Pour un volume \mathcal{V} délimité par la surface \mathcal{S} :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{A}) d^3r = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d^2r,$$

où d^3r est un petit élément de volume de \mathcal{V} et d^2r un petit élément de surface de \mathcal{S} et \mathbf{n} un vecteur unitaire normal à cet élément.

On précise en outre les valeurs numériques des grandeurs physiques suivantes :

m_e	Masse de l'électron	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$-e$	Charge de l'électron	$-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
ϵ_0	Permittivité absolue du vide	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
N_A	Nombre d'Avogadro	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
h	Constante de Planck	$6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$

1 Interaction d'une onde électromagnétique avec les métaux et les milieux diélectriques

1.1 Propagation de l'onde dans les métaux

On considère un métal comme un assemblage cristallin d'atomes. Chaque atome libère un ou plusieurs électrons de son nuage électronique, qui peuvent alors se déplacer dans le cristal comme une charge libre de masse m_e et de charge $-e$.

Q1. Dans le cas de l'argent il y a un électron de conduction par atome. On donne la densité du corps $d_{\text{Ag}} = 10.5$ et sa masse molaire $M(\text{Ag}) = 107.9 \text{ g mol}^{-1}$. Calculer la densité volumique d'électrons n_e (en cm^{-3}).

1.1.1 Modèle de Drude

En présence d'un champ électrique externe, les électrons vont se déplacer dans le métal. En plus de la force électrique les électrons subissent au niveau microscopique des collisions aléatoires sur les défauts du cristal ou avec les ions du réseau cristallin. Le modèle de Drude postule qu'il résulte de ces collisions une force d'amortissement du mouvement de la forme :

$$\mathbf{F}_D = -\frac{\mathbf{p}}{\tau},$$

où \mathbf{p} est la quantité de mouvement de l'électron et τ un temps d'amortissement, caractéristique du métal.

Q2. On soumet le métal à une onde électromagnétique à la pulsation ω :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}$$

On néglige l'effet du champ magnétique sur le mouvement des électrons et on suppose qu'ils atteignent un régime d'oscillation stationnaire forcé. Calculer l'amplitude complexe des oscillations en impulsion $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \omega)$.

Q3. En déduire que la densité de courant \mathbf{j} à la fréquence ω vérifie une loi d'Ohm de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \\ \text{avec } \sigma(\omega) &= \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \end{aligned}$$

Q4. On suppose maintenant une onde électromagnétique transverse le long de la direction $+x$: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(x)\mathbf{u}_z e^{-i\omega t}$, où \mathbf{u}_z est un vecteur unitaire suivant la direction z . Montrer à partir des équations de Maxwell que le champ électromagnétique vérifie l'équation d'onde :

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

$$\text{où } \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

$$\text{avec } \omega_P = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}} \text{ et } \gamma = 1/\tau.$$

La quantité ω_P est appelé la *fréquence plasma* des électrons.

Q5. Calculer la valeur numérique de ω_P (en s^{-1}). Quelle est l'énergie d'un photon de pulsation ω_P (en eV) ? À quel domaine spectral d'onde électromagnétique cette valeur correspond-elle ?

1.1.2 Absorption de l'onde

On suppose maintenant que l'onde électromagnétique est une onde plane incidente dans la direction $+x$: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{u}_z e^{i(kx - \omega t)}$.

Q6. Des expériences nous permettent de trouver que $(h/2\pi) \times \gamma = 20$ meV. Montrer que dans le cas d'une onde dans le domaine infrarouge ou visible on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \\ \text{avec } \varepsilon_1 &\approx -\frac{\omega_P^2}{\omega^2} \\ \text{et } \varepsilon_2 &\approx \frac{\omega_P^2 \gamma}{\omega^3} \end{aligned}$$

↑ milli.eV

Q7. Dans le cas de la question précédente, déduire de la relation de dispersion de l'onde l'indice effectif $n(\omega)$ du métal.

Q8. Montrer que l'intensité de l'onde incidente décroît de façon exponentielle : $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$. On donnera en particulier la relation entre le coefficient d'absorption α et la partie imaginaire de $n(\omega)$.

1.1.3 Comparaison avec l'expérience

On considère que le modèle précédent caractérise bien le comportement des électrons de conduction du métal. La valeur de ω_P calculée à la question **Q5** demeure en particulier inchangée et est caractéristique du métal. Le comportement du métal soumis à un rayonnement infra-rouge suit bien les résultats de la question **Q6**. La figure 1 présente les mesures expérimentales des parties réelle et imaginaire de $n(\omega)$ en fonction de la fréquence de l'onde incidente (exprimée en eV)

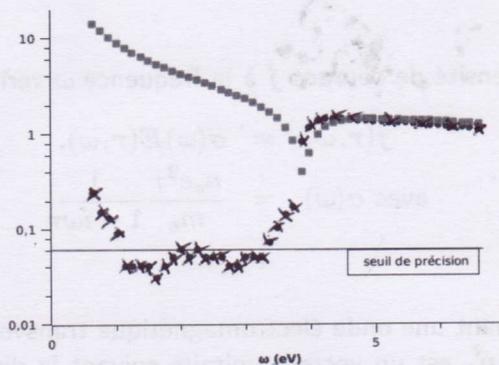


FIG. 1 – Parties réelle et imaginaire de l'indice optique pour des films d'Ag

Q9. Reproduire schématiquement la figure et identifier les parties réelle et imaginaire.

Q10. Expliquez qualitativement pourquoi les résultats expérimentaux de la figure 1 démontrent que le modèle de Drude ne rend pas compte du comportement de tous les électrons du métal. Ceci est dû au fait que les niveaux d'énergie des électrons (libres et liés aux atomes) sont quantifiés dans des bandes d'énergie.

1.2 Équation de Maxwell dans les milieux diélectriques

En fait, même dans les matériaux non métalliques, la matière est constituée au niveau microscopique de particules chargées qui sont sensibles au champ électrique externe. Sous l'effet de ce dernier

Q1
$$n_e = \frac{\rho_{Ag} \cdot N_A}{(1e^- / \text{atome Ag}) M_{Ag}} = \frac{d_{Ag} \rho_{eau} N_A}{M_{Ag}}$$

$$n_e = \frac{10,5 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-6}}{107,9 \cdot 10^{-3}} = 5,85 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

↑
en cm⁻³ ↑ 3 chiffres significatifs

Q2 Théorème du centre d'inertie à l'élection:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau} \text{ ou } \frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

En régime d'oscillation stationnaire forcée toute grandeur varie sinusoidalement:

$\frac{d}{dt}$ revient à multiplier par $-i\omega \rightarrow$

$$-i\omega \vec{p} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau} \rightarrow \vec{p} = -\frac{e}{\frac{1}{\tau} - i\omega} \vec{E}$$

d'où
$$\rho(r, \omega) = -\frac{e}{\frac{1}{\tau} - i\omega} E(r, \omega)$$

Q3
$$\vec{j} = -ne\vec{v} = -\frac{ne}{m} \vec{p}$$

$$j(r, \omega) = -\frac{ne}{m} \rho(r, \omega) = \frac{ne^2}{m(\frac{1}{\tau} - i\omega)} E(r, \omega)$$

on a bien
$$j(r, \omega) = \sigma(\omega) E(r, \omega) \text{ avec } \sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m_e(1-i\omega\tau)} \text{ (OK)}$$

Q4
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{E} = 0 \text{ (milieu neutre globalement)}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}) = 0 - \Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma (-i\omega) \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) \vec{E} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \mu_0 \sigma i\omega \frac{c^2}{\omega^2}) \vec{E} = \vec{0}$$

$$\mu_0 \sigma i\omega \frac{c^2}{\omega^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{ne^2\tau}{m_e(1-i\omega\tau)} \frac{ic^2}{\omega} = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega} \frac{i}{1-i\omega\tau}$$

$$\mu_0 \sigma i\omega \frac{c^2}{\omega^2} = -\frac{\omega^2}{\omega} \frac{1}{\frac{1}{\tau} + i\omega}$$

On a bien
$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \Sigma(\omega) \vec{E} = \vec{0} \text{ avec}$$

$$\Sigma(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\delta)} \text{ (OK)}$$

avec
$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} \text{ et } \delta = \frac{1}{\tau}$$

Q5
$$\omega_p = \sqrt{\frac{5,85 \cdot 10^{28} \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}}$$

$$\omega_p = 1,36 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

Energie du photon:
$$E_{\text{photon}} = h\nu_p = h \frac{\omega_p}{2\pi}$$

$$E_{\text{photon}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 1,36 \cdot 10^{16}}{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 8,98 \text{ eV}$$

(1eV = 1,6 · 10⁻¹⁹ J)

$$\lambda_p = \frac{c}{\nu_p} = \frac{c 2\pi}{\omega_p} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2\pi}{1,36 \cdot 10^{16}} = 138 \text{ nm}$$

138 nm = 0,138 μm

Visible ∈ [0,4 ; 0,8] μm $\frac{UV \text{ [visible] IR}}{0,4 \quad 0,8} \lambda \text{ μm}$

On est dans le domaine de l'ultra-violet.

Q6
$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

avec ω_p correspondant à U.V.: $\frac{h\omega_p}{2\pi} = 8,98 \text{ eV}$

Pour une onde en ω correspondant à I.R on a donc $\lambda_{IR} \gg \lambda_{UV}$ soit $\omega_{IR} \ll \omega_{UV}$ c'est à dire

$\omega \ll \omega_p$ soit $\frac{h\omega}{2\pi} \ll \frac{h\omega_p}{2\pi} = 8,98 \text{ eV}$. Or $\frac{h\gamma}{2\pi} = 0,02 \text{ eV}$

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 + i\frac{\gamma}{\omega})} \text{ donc } \frac{\gamma}{\omega} \ll 1$$

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (1 - i\frac{\gamma}{\omega}) = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \quad \epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega^2 \gamma}{\omega^3}$$

Comme $\omega \ll \omega_p$ $\epsilon_1 \approx -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

Résumé: on a bien
$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 \text{ avec } \epsilon_1 \approx -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \text{ (OK)}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega^2 \gamma}{\omega^3}$$

Q7
$$n(\omega) = \epsilon^{\frac{1}{2}} = (\epsilon_1 + i\epsilon_2)^{\frac{1}{2}} = \left(-\epsilon_1 (1 - i\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

or $\left| \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right| = \frac{\gamma}{\omega} \ll 1$ donc $n(\omega) \approx \sqrt{-\epsilon_1} i (1 + \frac{i\epsilon_2}{2\epsilon_1})$

$\Delta \epsilon_1 < 0$

$$n(\omega) = \pm i \sqrt{-\epsilon_1} (1 + \frac{i}{2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})$$

Q8 La solution de $\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} \Sigma E = 0$ est de type $e^{i(kx - \omega t)}$ avec $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Sigma$

donc $\underline{k} = \frac{\omega}{c} \Sigma^{\frac{1}{2}} = \frac{n\omega}{c} \text{ (} i(kx - \omega t)\text{)}$

L'onde qui se propage vers $x \uparrow$ est en $e^{i(kx - \omega t)}$ avec $k_x \in \mathbb{R}^+$; il faut donc choisir

$$n(\omega) = +i \sqrt{-\epsilon_1} (1 + \frac{i}{2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})$$

$\Delta \epsilon_1 < 0$

$$n(\omega) = -\frac{\sqrt{-\epsilon_1} \epsilon_2}{2\epsilon_1} + i\sqrt{-\epsilon_1}$$

$$\epsilon_1 < 0 \text{ donc } -\frac{1}{\epsilon_1} = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\epsilon_1}} \text{ et } -\frac{\sqrt{-\epsilon_1} \epsilon_2}{2\epsilon_1} = \frac{\epsilon_2}{2\sqrt{-\epsilon_1}}$$

$$n(\omega) = \frac{\epsilon_2}{2\sqrt{-\epsilon_1}} + i\sqrt{-\epsilon_1} \text{ et } k = \frac{\epsilon_2 \omega}{2\sqrt{-\epsilon_1} c} + i\sqrt{-\epsilon_1} \frac{\omega}{c}$$

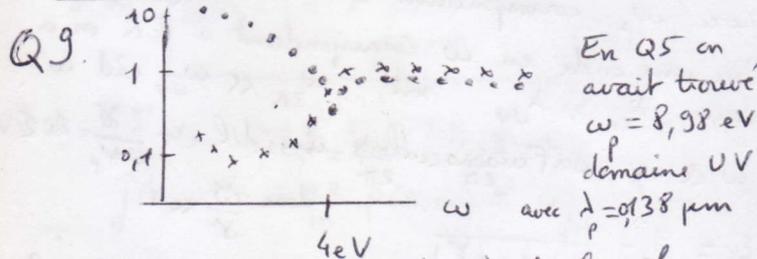
Le champ E varie en $e^{i(\frac{\epsilon_2 \omega}{2\sqrt{-\epsilon_1} c} x - \omega t)} e^{-\sqrt{-\epsilon_1} \frac{\omega}{c} x}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{propagation } x \uparrow}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{attenuation dans le sens } x \uparrow}$

L'intensité est proportionnelle au module au carré de E donc $I = I_0 e^{-\alpha x}$ avec

$$\alpha = 2\sqrt{-\epsilon_1} \frac{\omega}{c} = \frac{2\omega_p}{c}$$

$$\alpha = \frac{2\omega}{c} \text{Im}(n(\omega))$$



L'I.R se situe à des λ 10 fois plus grands donc à des ω 10 fois plus petits c-à-d des $\omega < 0,9 \text{ eV}$. C'est la partie où les 2 courbes diminuent ce qui est en accord avec $n_1 = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$ et $n_2 = \frac{\omega_p}{\omega}$

On observe que la courbe en x décroît plus vite dans ce domaine ce qui tendrait à montrer que la courbe en x (celle du dessous) correspond à n_1 .

De plus celle du dessus présente un pic d'absorption entre $\omega = 4 \text{ eV}$ ce n n'est pas éloigné de $8,98 \text{ eV}$

On remarque sinon à haute fréquence que les courbes se rejoignent et donnent 1 : il n'y a plus d'absorption et la propagation se fait à c .

Résumé :
 • la partie réelle de n (n_1) est la courbe du dessous (avec des x)
 la partie imaginaire (n_2) est celle du dessus.

Q10 A haute fréquence la figure indique $n_1 = n_2 = 1$. Or le modèle de Drude ne conduirait pas à l'égalité, en tout cas pas de manière évidente puisque ϵ_2 contient γ et pas ϵ_1 .