

COMPOSITION DE PHYSIQUE – C – (U)

(Durée : 6 heures)

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

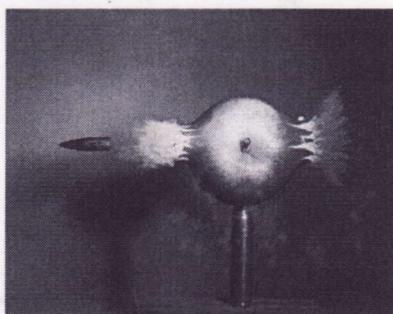
Le sujet comprend 19 pages numérotées de 1 à 19

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

* * *

De l'utilisation d'impulsions électromagnétiques ultracourtes...

Au début du 19^{ème} siècle, les prises d'images de mouvements mécaniques étaient réalisées à l'aide de dispositifs photographiques, dont les temps d'expositions étaient contrôlés par des obturateurs mécaniques. Ces derniers permettaient de "figer" un mouvement avec des durées d'exposition minimales de typiquement 1 ms. Tout mouvement s'effectuant sur des échelles de temps inférieures donne alors une image floue.



Afin de réaliser des prises de vue de mouvements rapides, un changement de paradigme a été proposé durant les années 1940 par Harold Eugene Edgerton, professeur de génie électrique au MIT. Plutôt que de développer des capteurs plus rapides avec un objet éclairé continûment, il proposa la technique de photographie stroboscopique. Le principe consiste alors à utiliser un capteur lent, mais d'éclairer l'objet avec un flash lumineux. Ainsi, malgré la lenteur du détecteur, la durée d'exposition est limitée désormais par la durée du flash lumineux, soit typiquement 1 μ s. Cette technique a permis de produire les premières images de phénomènes mécaniques rapides, comme par exemple l'impact d'une balle dans une pomme, réalisée avec un flash de 0.3 μ s (MIT Museum Collections, Bullet through apple (1964)).

Le développement récent des technologies laser a permis de produire des impulsions lumineuses dites "ultra-courtes" offrant alors la possibilité, de façon similaire à H. E. Edgerton, d'étudier la dynamique moléculaire ultrarapide à l'échelle microscopique. Le prix Nobel de Chimie a été attribué en 1999 au professeur Ahmed H. Zewail (California Institute of Technology) pour avoir montré qu'il est possible ainsi d'observer le mouvement des atomes d'une molécule au cours des réactions chimiques à l'aide de telles sources lumineuses. L'objet de ce problème est d'étudier différents systèmes physiques permettant de produire des impulsions ultracourtes, et les contraintes liées à leur manipulation.

Ce sujet est constitué de trois parties indépendantes. Chacune est divisée en sous-parties elles-mêmes largement indépendantes les unes des autres.

FORMULAIRE

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 2\pi\hbar = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_a = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge de l'électron	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$

Valeurs numériques utiles

1 picoseconde	1 ps = 10^{-12} s
1 femtoseconde	1 fs = 10^{-15} s
1 attoseconde	1 as = 10^{-18} s
1 gigahertz	1 GHz = 10^9 Hz
1 térahertz	1 THz = 10^{12} Hz
1 électron-volt	1 eV = 1.60×10^{-19} J
unité de masse atomique (amu)	1 amu = 1.66×10^{-27} kg

Notations

On adopte la notation complexe $\mathcal{G}(t)$ pour toute grandeur $G(t)$ réelle dépendant du temps selon

$$G(t) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(t) + \mathcal{G}^*(t)) = \text{Re}(\mathcal{G}(t)).$$

Relations utiles

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Formule du double produit vectoriel pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \text{ et } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

Analyse vectorielle

Pour \vec{A} un champ de vecteur quelconque,

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}.$$

Intégrales diverses

Pour $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} e^{-ibx} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{2a^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} dx = 0,$$

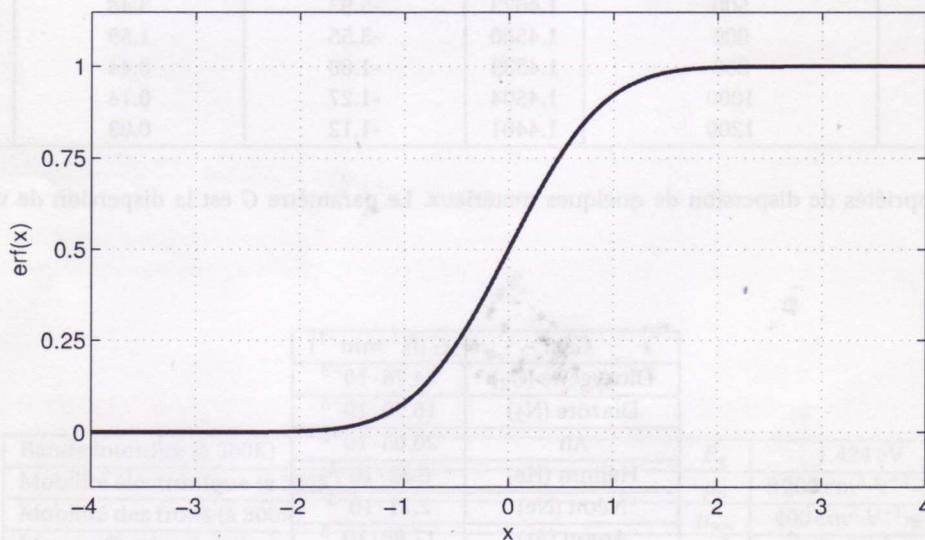
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} dx = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{a^{2n}} \frac{\sqrt{2\pi}}{a}.$$

La fonction *erreur*, notée $\operatorname{erf}(x)$, est définie selon

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2} du,$$

et on a la propriété suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$



Représentation graphique de la fonction erreur.

Equation différentielle du première ordre avec second membre - méthode de la variation de la constante

On considère l'équation différentielle (1) sur la fonction réelle y définie sur \mathbb{R} , de variable réelle x selon

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x), \quad (1)$$

où a et b sont deux fonctions réelles. Soit A une primitive de a et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Il existe une solution unique y de l'équation (1) telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie selon

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y_0 e^{A(x_0) - A(x)} + \int_{x_0}^x b(t) e^{A(t) - A(x)} dt. \quad (2)$$

I. Quelques échelles de temps...

A. Dynamique moléculaire : états vibrationnels

Dans cette section, on considère le matériau sous forme d'un diélectrique homogène. On adopte

		Au	Cu	Al
σ_0	Conductivité à basse fréquence ($\times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$)	45.2	59.6	37.7
n	Densité d'électrons libres ($\times 10^{28} \text{ m}^{-3}$)	5.9	8.47	18.1
κ	Conductivité thermique ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	314	385	205
Δh_{liq}	Enthalpie de liquéfaction ($\text{GJ}\cdot\text{m}^{-3}$)	1.22	1.80	1.08
Δh_{vap}	Enthalpie de vaporisation ($\text{GJ}\cdot\text{m}^{-3}$)	31.7	42.4	29.4
T_{liq}	Température de liquéfaction (K)	1337	1358	933
T_{vap}	Température de vaporisation (K)	3129	2835	2792
C_i	Capacité calorifique volumique des ions du réseau ($\times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$)	2.5	3.46	2.43
A_e	Coefficient de capacité calorifique volumique ($C_e = A_e T_e$) ($\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-2}$)	71	97	135
γ	Coefficient de couplage thermique électrons-réseau ($\times 10^{16} \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$)	2.1	10	56.9
α	Coefficient d'absorption optique à $\lambda = 800 \text{ nm}$ ($\times 10^7 \text{ m}^{-1}$)	6.9	6.3	5.9

TABLE 3 – Propriétés physiques de métaux usuels.

Bande interdite (à 300K)	E_g	1.424 eV
Mobilité électronique (à 300K)	μ_{el}	$9\,200 \text{ cm}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
Mobilité des trous (à 300K)	μ_{trou}	$400 \text{ cm}^2\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
Masse effective des électrons	m_{el}^*	$0.067 m_e$
Coefficient de réflexion à l'interface Air-GaAs (à $\lambda = 800 \text{ nm}$)	R	0.318
Coefficient d'absorption optique (à $\lambda = 800 \text{ nm}$)	α	6000 cm^{-1}
Durée de vie des porteurs dans SI-GaAs	τ_c	$\sim 100 \text{ ns}$
Durée de vie des porteurs dans LT-GaAs	τ_c	$\sim 1 \text{ ps}$
Permittivité relative dans le domaine THz	ϵ_r	13

TABLE 4 – Propriétés électroniques de GaAs.

GRANDEURS TABULÉES

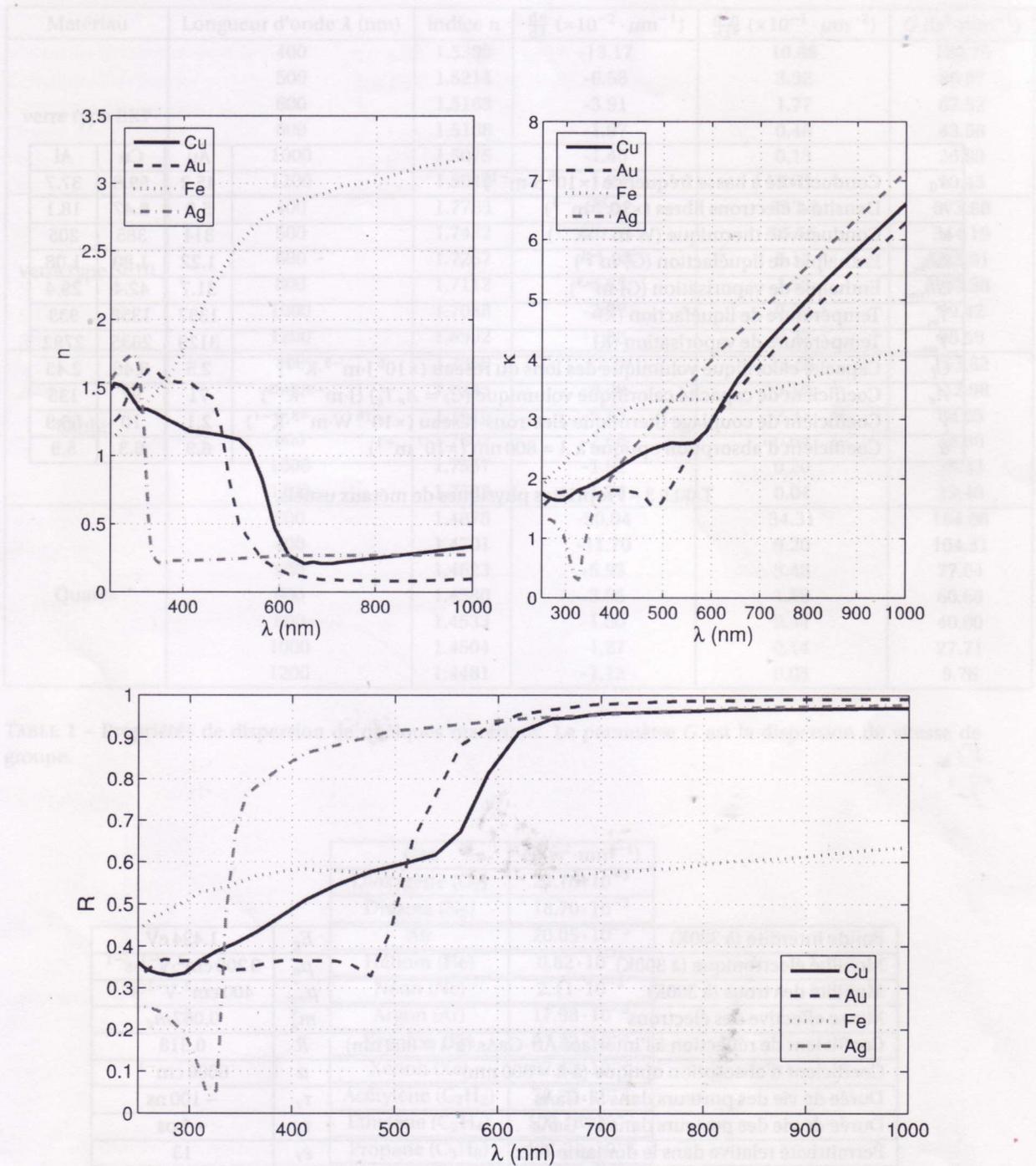


FIGURE 1 – Propriétés optiques de quelques métaux. Parties réelles (n) et imaginaires (κ) de l'indice de différents métaux dans le domaine optique, et coefficient de réflexion en intensité correspondant.

II. Interaction d'une impulsion avec la matière...

Dans cette section, on s'intéresse à l'interaction entre une impulsion femtoseconde et une surface métallique ou semiconductrice. On modélise le métal comme une maille cristalline fixe, constituée d'ions positifs immobiles, et d'un gaz d'électrons libres.

Q16. Connaissez-vous des applications des lasers à impulsions ? On répondra succinctement.

A. Propagation dans un métal

On adopte le modèle de Drude de la description d'un métal : un électron de vitesse \vec{v} est soumis à une force de frottement visqueuse $-\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ traduisant l'interaction avec la maille cristalline. On considère que cet électron est soumis à un champ électrique extérieur de pulsation ω , d'amplitude complexe $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$. On note n la densité d'électrons libres du métal considéré.

Q17. Montrer que le vecteur densité de courant vérifie une loi d'Ohm généralisée $\vec{j} = \sigma(\omega) \vec{\mathcal{E}}$, où $\sigma(\omega)$ est une conductivité complexe que l'on explicitera.

Q18. Justifier que la densité de charge complexe ρ est nulle.

Q19. Montrer que l'équation de propagation dans le métal s'exprime sous la forme

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{\mathcal{E}} = 0,$$

où l'on explicitera $\epsilon_r(\omega)$ en fonction de τ , ω et ω_p la fréquence plasma du métal définie selon

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}.$$

Q20. Évaluer τ et ω_p pour le cuivre. Le cuivre permet-il de faire des bons miroirs d'ondes térahertz ? d'ondes optiques dans le domaine visible ? d'ondes ultraviolettes lointaines (que l'on rencontrera dans les impulsions ultracourtes dites "attosecondes") ? Discuter brièvement du cas des autres métaux comme l'or ou l'aluminium. On argumentera en tenant compte des résultats de la question précédente, ainsi que des propriétés optiques des métaux données en début de sujet.

B. Interaction avec un semiconducteur : changer de fréquence...

Un matériau semi-conducteur est un matériau dans lequel chaque électron est lié à un ion de la maille cristalline. Du fait de l'agitation thermique, une faible proportion d'atomes est excitée avec une énergie suffisante pour être ionisés. L'électron issu de cette ionisation peut se déplacer librement dans la maille cristalline, comme dans un métal : on parle de porteur de charge libre. L'interaction avec les autres électrons et la maille cristalline se modélise par une modification de la masse de ces électrons, que l'on note désormais m_{el}^* , appelée *masse effective*. Les ions positifs correspondant à ces électrons devenus libres portent une charge positive. Cette dernière peut se propager de proche en proche par transfert d'électrons liés. On modélise cette "lacune" électronique comme une particule appelée "trou", de charge $+e$ et de masse effective m_{trou}^* .

La dynamique des électrons et des trous est décrite par un modèle de Drude. Sous l'action d'un champ électrique, chaque électron (resp. trou) est soumis à une force de frottement fluide de la forme $-\frac{m_{el}^* \vec{v}_{el}}{\tau_{el}}$ (resp. $-\frac{m_{trou}^* \vec{v}_{trou}}{\tau_{trou}}$), où \vec{v}_{el} (resp. \vec{v}_{trou}) est la vitesse d'un électron (resp. d'un trou).

On se place dans un régime avec une constante de temps caractéristique du champ électrique notée τ_0 .

Q21. Dans la limite où $\tau_0 \gg \tau_{el}, \tau_{trou}$, montrer que le vecteur densité de courant \vec{j} peut se mettre sous la forme

$$\vec{j} = (n_{el} \mu_{el} + n_{trou} \mu_{trou}) e \vec{E},$$

où n_{el} (resp. n_{trou}) est la densité volumique d'électrons (resp. de trous), et μ_{el} (resp. μ_{tr}) est appelé *mobilité* des électrons (resp. des trous). Dans le cas de l'arséniure de gallium GaAs, à partir des données proposées en début de sujet, justifier que l'on puisse négliger la contribution des trous dans une première approche.

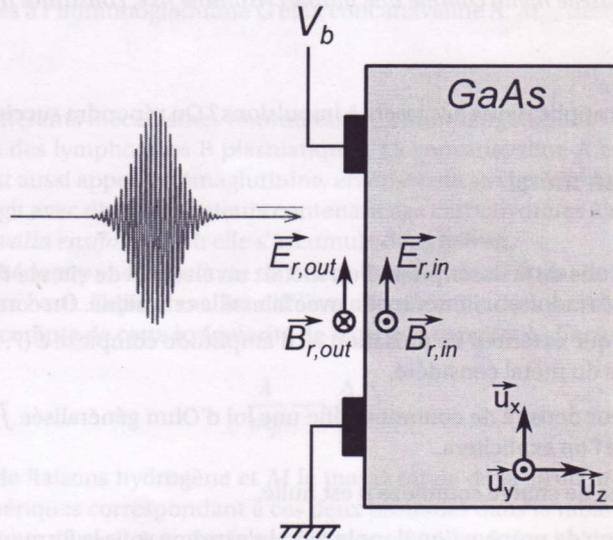


FIGURE 5 – Géométrie d'une antenne photoconductive.

Dans la suite, nous considérerons donc uniquement la contribution des électrons. On considère l'interaction entre une impulsion ultracourte femtoseconde, de longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 800$ nm, de durée $\delta = 100$ fs et un cristal de GaAs. La géométrie considérée est schématisée Fig. 5. L'impulsion se propage selon l'axe Oz , en incidence normale sur un demi-espace ($z > 0$) constitué de GaAs. L'origine des temps est telle que l'intensité surfacique incidente sur le semi-conducteur est

$$I(z=0^-, t) = F_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}},$$

où F_0 est la fluence de l'impulsion.

Le semi-conducteur est muni d'une paire d'électrodes, auxquelles il est possible d'appliquer une différence de potentiel V_b . Ces électrodes permettent de polariser le milieu semi-conducteur par un champ électrique statique \vec{E}_b . Dans le cas d'un semi-conducteur, une onde lumineuse peut ioniser le matériau et augmenter ainsi le nombre d'électrons et de trous dans le matériau. Ces derniers étant générés simultanément, on parle de paire électron-trou. Dans une description corpusculaire, un photon de fréquence ν pourra être absorbé et créer une paire électron-trou si son énergie est supérieure à une énergie de *bande interdite* E_g , c'est-à-dire l'énergie d'ionisation d'un atome de la maille.

On note R le coefficient de réflexion optique en intensité à l'interface Air-GaAs, et α le coefficient d'absorption linéaire optique à $\lambda_0 = 800$ nm défini selon

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -\alpha I(z, t).$$

Soit une tranche de GaAs de section Σ , d'épaisseur dz , soumis à une onde optique de fréquence ν (telle que $h\nu > E_g$) et d'intensité surfacique I ; alors le nombre de paires électron-trou photogénérées $d^2N(z, t)$ pendant dt est

$$d^2N(z, t) = \alpha \frac{I}{h\nu} \Sigma dz dt.$$

Après avoir été formés, les électrons et les trous peuvent se recombiner dans le matériau, à un taux de recombinaison constant défini selon

$$\left(\frac{1}{n_{el}} \frac{dn_{el}}{dt} \right)_{\text{recomb}} = \left(\frac{1}{n_{trou}} \frac{dn_{trou}}{dt} \right)_{\text{recomb}} = -\frac{1}{\tau_c},$$

où τ_c est le temps de recombinaison des porteurs.

Q22. À partir d'un bilan local, établir l'équation d'évolution de la densité volumique d'électrons $n_{ei}(z, t)$.

Q23. En utilisant la méthode de la variation de la constante donnée en début de sujet (voir équation (2) dans le formulaire), montrer que la densité électronique au cours du temps s'exprime ainsi

$$n_{ei}(z, t) = \alpha \frac{F_0}{h\nu} (1-R) e^{-\alpha z} e^{\frac{\delta^2}{2\tau_c^2}} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\delta} \left(t - \frac{\delta^2}{\tau_c}\right)\right).$$

Q24. Dans la suite, on se place dans la limite où $\delta \ll \tau_c$. Simplifier $n_{ei}(z, t)$ et tracer son allure en fonction de t .

Ces charges sont accélérées par un champ uniforme et statique $\vec{E}_b = E_b \vec{u}_x$, généré par les électrodes mentionnées précédemment (voir Fig. 5). **On admet** qu'un champ est rayonné par ce mouvement de charge, polarisé selon \vec{u}_x dans cette géométrie, et que l'amplitude \vec{E}_{ray} de ce champ rayonné est proportionnel à la dérivée temporelle du courant électronique

$$\vec{E}_{\text{ray}} \propto \frac{\partial \vec{j}}{\partial t},$$

dans les régions de l'espace situées à une distance $r \gg \lambda_{\text{ray}}$ de l'interface excitée, où λ_{ray} est la longueur d'onde caractéristique du rayonnement dans le vide.

Q25. Tracer l'allure du profil temporel du champ électrique rayonné (en valeur algébrique), et estimer l'échelle de temps caractéristique du rayonnement émis. Conclure quant à la production d'impulsions térahertz.

Q26. Donner un ordre de grandeur de la longueur d'onde associée au rayonnement émis et comparer sa valeur à la profondeur de pénétration optique de l'impulsion femtoseconde excitatrice dans GaAs.

C. Sublimation laser d'un métal

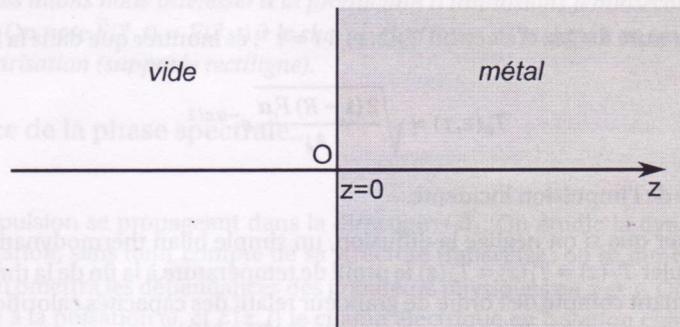


FIGURE 7 – Géométrie 1D considérée dans la sublimation laser d'un métal.

On s'intéresse désormais à l'interaction d'une impulsion femtoseconde de suffisamment forte puissance pour détériorer une surface métallique par sublimation du métal, due à l'échauffement par effet Joule. On considère une onde incidente, se propageant selon Oz , d'intensité surfacique $I(t)$ en $z = 0$. L'espace est constitué d'un métal dans le demi-espace $z > 0$ et du vide pour $z < 0$. L'interface vide-métal pour l'impulsion est caractérisée par un coefficient de réflexion en intensité R . On note $\alpha = -\frac{1}{\gamma} \frac{dI}{dz}$ le coefficient linéique d'absorption dans le métal. La description thermodynamique du processus de sublimation est modélisée ainsi :

- le gaz d'électrons et la maille cristalline sont considérés comme deux sous-systèmes thermodynamiques couplés ;
- l'énergie lumineuse dissipée par effet Joule est initialement transférée uniquement aux électrons ;
- on néglige les effets de bords selon x et y , et donc on adopte un modèle 1D selon Oz .

On introduit deux températures pour décrire le système : T_e la température du gaz d'électrons et T_i la température de la maille cristalline d'ions. L'échange de chaleur volumique par unité de temps $\Pi_{e \rightarrow i}$ des électrons vers la maille cristalline s'exprime selon $\Pi_{e \rightarrow i} = \gamma (T_e - T_i)$, où γ est le coefficient de couplage électrons-cristal. On adopte les notations suivantes

- C_e et C_i sont les capacités calorifiques volumiques respectivement du gaz d'électrons et de la maille cristalline ;
- S est le taux de création volumique de chaleur dans le gaz d'électrons ;
- les deux sous-systèmes vérifient la loi de Fourier pour la conductivité thermique ; la densité de courant de chaleur s'exprime alors selon $\vec{j}_{e,i} = -\kappa_{e,i} \overrightarrow{\text{grad}} T_{e,i}$, où κ_e et κ_i sont les coefficients de conductivité thermique respectivement du gaz d'électrons et de la maille cristalline.

On admet que la conductivité thermique de la maille cristalline est négligeable $\kappa_i \approx 0$, et que C_i est indépendante de la température. En revanche, **on tient compte de la dépendance en température de** $C_e = A_e T_e$, où A_e est un coefficient constant. Pour simplifier, on considère une impulsion de profil temporel rectangulaire de durée τ , d'intensité surfacique I_0 , dont le front montant arrive en $z = 0$ à $t = 0$. Initialement, on a $T_e(0^-) = T_i(0^-) = T_0$.

Q32. Justifier physiquement la forme de $\Pi_{e \rightarrow i}$ par analogie avec une situation physique connue.

Q33. Montrer que le terme source de chaleur volumique par unité de temps du gaz d'électrons est de la forme $S(z, t) = S_0(t) e^{-\alpha z}$, où l'on explicitera $S_0(t)$.

Q34. En effectuant un bilan d'énergie à une tranche dz située en z , de section σ , établir un système de deux équations couplées sur les températures T_e et T_i .

Q35. Par analyse dimensionnelle, établir l'expression de trois constantes de temps associées aux transferts thermiques, caractéristiques du système couplé.

Dans le cas général, la résolution d'un tel système se fait numériquement. On cherche une solution dans un régime particulier se décomposant en 2 étapes :

- la diffusion et le transfert électrons-ions ne s'effectuent pas à l'échelle de la durée de l'impulsion lumineuse. À cette échelle de temps, seul le gaz d'électrons est chauffé, sans diffusion ;

– une fois la puissance lumineuse absorbée, l'énergie est transférée aux ions, sans que la diffusion soit notable.

Q36. Expliciter une condition sur les constantes de temps mentionnées précédemment, ainsi que τ la durée de l'impulsion lumineuse, pour que ces hypothèses soient valables. On supposera cette condition vérifiée dans la suite. $I_0(t) = I_0$ sur la durée τ .

Q37. Calculer la température du gaz d'électron $T_e(z, \tau)$ à $t = \tau^+$, et montrer que dans la limite où $T_e(z, \tau) \gg T_0$,

$$T_e(z, \tau) \approx \sqrt{\frac{2(1-R)F_i\alpha}{A_e}} e^{-\alpha z/2},$$

où $F_i = I_0\tau$ est la fluence de l'impulsion incidente.

Q38. Pour $t > \tau$, montrer que si on néglige la diffusion, un simple bilan thermodynamique appliqué au bon système permet de calculer $T_f(z) = T_i(z) = T_e(z)$ le profil de température à la fin de la thermalisation électrons-ions. Simplifier T_f en tenant compte de l'ordre de grandeur relatif des capacités calorifiques C_i et C_e , ainsi que de l'hypothèse $T_e(\tau) \gg T_0$ (pour simplifier, on supposera que $T_0 = 0$ K).

Q39. Dans le régime où l'intensité surfacique est suffisante pour sublimer le métal, montrer que la profondeur \mathcal{L} de métal sublimé en fonction de la fluence incidente est de la forme

$$\mathcal{L} = \alpha^{-1} \ln\left(\frac{F_a}{F_{th}}\right),$$

où $F_a = (1-R)F_i$ est la fluence absorbée et F_{th} est une fluence seuil que l'on exprimera en fonction de l'enthalpie volumique de vaporisation Δh_{vap} , de l'enthalpie volumique de liquéfaction Δh_{liq} , de la capacité calorifique du réseau C_i supposée constante, du coefficient d'absorption optique α , de T_{vap} la température de vaporisation et de T_0 (température initiale du métal).

Calculer F_{th} numériquement dans le cas du cuivre.

Q40. On considère le cas d'une impulsion de 150 fs. En utilisant les données situées en début de sujet, évaluer les différentes constantes de temps pertinentes du problème pour **un métal** que l'on choisira parmi le cuivre, l'aluminium ou l'or. On évaluera ces dernières à une température de 2800 K.

Q41. Commenter les valeurs obtenues et discuter les hypothèses précédentes. Conclure.

16) Chirurgie de l'œil
 • Mesure distance Terre-Lune
 • Décharge météore

17) PFD à 1e- $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$
 En régime forcé $-im\omega\vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$

d'où $\vec{v} (im\omega - \frac{m}{\tau}) = e\vec{E}$
 $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\vec{E}}{m(\frac{1}{\tau} - i\omega)} = \sigma\vec{E}$

d'où $\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m(\frac{1}{\tau} - i\omega)} = \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)}$

18) Eq^m de conservation de la charge:
 $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
 La d'Ohm $\vec{j} = \sigma\vec{E} \rightarrow \sigma \text{div } \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
 Navier-Stokes: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
 de solution $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon_0}} \rightarrow 0$ (t → ∞)

A partir d'un temps $\sim \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ on peut considérer $\rho = 0$
 (Métal $\sigma \sim 10^7$, $\epsilon_0 \sim 10^{-11} \rightarrow t_p \sim 10^{-18}$ s)

Rq: si on raisonne en régime forcé $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ conduit à $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\omega\rho = 0$
 soit $\rho(\sigma - i\omega) = 0$ donc $\rho = 0$

19) Maxwell: $\text{div } \vec{E} = 0$ ($\rho = 0$)
 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
 $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$
 $-\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0 - \Delta \vec{E}$
 $\Delta \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

$\Delta \vec{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \sigma i\omega \right) \vec{E} = 0$

$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right) \vec{E} = 0$

$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = 0$
 $\epsilon_\lambda = 1 + \frac{i\sigma}{\omega} = 1 + \frac{ine^2\tau}{m\epsilon_0(1-i\omega\tau)\omega}$

$\epsilon_\lambda = 1 + \frac{i\omega_p^2\tau}{(1-i\omega\tau)\omega}$

AN cf table 3 on lit σ et n du Cu.
 d'où, à partir de $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$:

$\tau = \frac{m\sigma_0}{ne^2} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 59,6 \cdot 10^6}{8,47 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,5 \cdot 10^{-14}$ s

$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8,47 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 1,6 \cdot 10^{16}$ s⁻¹

1 terahertz = 10^{12} Hz $\Rightarrow \omega \sim 10^{13}$ s⁻¹
 $\Rightarrow \omega\tau \sim 10^{-1} \Rightarrow 1 - i\omega\tau \approx 1$
 $\frac{\omega_p^2\tau}{\omega} \sim \frac{10^{16} \cdot 10^{-14}}{10^{13}} \sim 10^5 \gg 1$

d'où $\epsilon_\lambda \sim i \frac{\omega_p^2\tau}{\omega}$ imaginaire pur
 La solution de $\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_\lambda \vec{E} = 0$

conduit à une solution avec atténuation car $i^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$ et E varie en $e^{-i(\omega t - kx)}$ avec $k = \frac{\omega}{c} \omega_p \sqrt{\frac{\epsilon}{\omega}} (\pm) \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

La partie imaginaire de k est responsable de cette atténuation.
 La longueur d'atténuation $\delta \sim \frac{1}{k} = \frac{c\sqrt{2}}{\omega_p \sqrt{\omega}}$
 $\delta \sim \frac{3 \cdot 10^8 \sqrt{2}}{\sqrt{10^{13}} \cdot 10^{16} \cdot \sqrt{10^{-14}}} \sim 10^{-7}$ m $\sim \frac{1}{10}$ μm

L'onde pénètre très peu dans le cuivre
le cuivre est un bon miroir des ondes terahertz.

Ondes optiques $\sim 10^{15}$ Hz $\Rightarrow \omega \sim 10^{15}$ à 10^{16} s⁻¹
 $\Rightarrow \omega\tau \gg 1 \Rightarrow \epsilon_\lambda \approx 1 + \frac{\omega_p^2\tau}{\omega^2\tau} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$\epsilon_\lambda \sim 10$ ce qui correspond à un indice $n \sim \sqrt{10}$
 On connaît le coefficient de réflexion en énergie par un onde en incidence normale
 $R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sim \left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} \right)^2$ petit $\sim \frac{1}{4}$

le cuivre ne sera pas un excellent miroir d'ondes optiques.

Ondes UV : $\lambda \ll 10^{-7} \text{ m} \rightarrow \omega \gg \frac{c2\pi}{\lambda}$

$\omega \gg 10^{16} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \omega\tau \gg 100 \gg 1$

$\Rightarrow \xi_n \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx 2 \quad R = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2$ est encore plus petit.

Il y aura - bonne réflexion sur le Cu des ondes UV.

D'après les diagrammes fournis, on remarque que la partie réelle de l'indice décrit des U.V aux IR alors que la partie imaginaire croît ce qui est associé à une augmentation du coefficient de réflexion R. Les calculs précédents le confirment.

Pour l'Ag, c'est un peu pareil que Cu. Pour Au, la réflexion a lieu dès les λ optiques proches de UV.

Le fer a un comportement différent indiquant une bonne réflexion même aux λ optiques proches de IR.

21) Par similitude avec 17)

$\vec{j} = -n_e e \vec{v}_e + n_{tr} e \vec{v}_{tr} = (\sigma_e + \sigma_{tr}) \vec{E}$
avec $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$ à TBF

soit $\vec{j} = \left(n_e \frac{e\tau_e}{m_e} + n_{tr} \frac{e\tau_{tr}}{m_{tr}} \right) e \vec{E}$

Dans la table 4 on lit $\mu_e/\mu_{tr} = \frac{9200}{400}$

donc on peut négliger l'action des trous.

22) Equation de conservation :

$\frac{dn \cdot \Sigma dz}{dt} = + \frac{\alpha I \Sigma dz}{hv} - \frac{1}{\tau} n \Sigma dz$
variation pendant dt formation par le faisceau perte par recombinaison

$\frac{dn}{dt} = \frac{\alpha I}{hv} - \frac{n}{\tau}$

On $\frac{dI}{I} = -\alpha dz$ donne par intégration

$I(z,t) = I(z=0^+, t) e^{-\alpha z}$

L'énoncé donne $I(z=0^-, t)$ mais pas $I(z=0^+, t)$

On le résultat fait intervenir R coeff de réflexion.

$I(z=0^+, t) = (1-R) I(z=0^-, t)$ (2)

donc $I(z,t) = (1-R) \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{-\alpha z}$

et l'équa. diff. devient :

$\frac{dn}{dt} + \frac{n}{\tau} = \frac{\alpha(1-R)F_0}{hv\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} e^{-\alpha z}$

L'énoncé donne le résultat par variation de la constante ; en adaptant et en prenant $t_0 \rightarrow -\infty$ (par traver la fonction erreur définie dans l'énoncé)

$n = n_0 e^{-\frac{t^2}{2\delta^2}} + \int_{-\infty}^t \frac{\alpha F_0(1-R)}{hv\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{t'^2}{2\delta^2}} e^{-\alpha z} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'$

Par retraver $\int e^{-u^2}$ du indiqué dans l'énoncé par défini erf, arrangeons l'exponentielle

$e^{-\frac{t'^2}{2\delta^2} + \frac{t-t'}{\tau}} = e^{-\frac{1}{2\delta^2}(t' - \frac{\delta^2}{\tau})^2 + \frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}}$
 $= e^{\frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} e^{-u^2}$

avec $u = \frac{1}{\sqrt{2\delta^2}} (t' - \frac{\delta^2}{\tau})$ $du = \frac{1}{\sqrt{2\delta^2}} dt'$

alors $n = \frac{\alpha F_0(1-R)}{hv\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\alpha z + \frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \sqrt{2\pi\delta^2} \text{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\delta^2}}(t - \frac{\delta^2}{\tau})\right)$

soit $n = \frac{\alpha F_0(1-R)}{hv} e^{-\alpha z + \frac{\delta^2}{2\tau^2} - \frac{t}{\tau}} \text{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\delta^2}}(t - \frac{\delta^2}{\tau})\right)$ (OK)

24) Quand $\delta \ll \tau_c$ $t - \frac{\delta^2}{\tau_c} \approx t$

$n_e(z,t) \approx \frac{\alpha F_0(1-R)}{hv} e^{-\alpha z} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2\delta^2}}\right)$

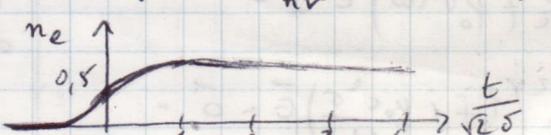
La courbe de la fonction erf est donnée par $\frac{t}{\sqrt{2\delta^2}} \in [-4; 4]$

Choisissons $\tau_c = 100\delta$ ($\tau_c \gg \delta$)

$\frac{t}{\sqrt{2\delta^2}}$	-4	-2	-1	0	1	2	3	4
$\text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2\delta^2}}\right)$	0,0	0,1	0,5	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	1	0,98				0,98	

$\left(\frac{t}{\tau} = \frac{t}{\sqrt{2\delta^2}} \frac{\sqrt{2\delta^2}}{\tau} = \frac{t}{\sqrt{2\delta^2}} \frac{\sqrt{2}}{100}\right)$

n_e 0 0 0,1 0,5 0,98 0,98 0,86 0,85
(au facteur $\frac{\alpha F_0(1-R)}{hv} e^{-\alpha z}$ près)



25) $j = -nev$ donc $\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{\partial n}{\partial t} e v$

en admettant v constant! mais je vois mal comment faire autrement.

L'énoncé ne donne rien sur la dérivée de la fonction erf. J'estime cette dérivée par l'allure de la courbe $n(\frac{t}{\sqrt{2}\delta})$

Elle est nulle quasiment partout sauf par $\frac{t}{\sqrt{2}\delta} \in [0, 0,5]$

E_{ray} apparaît dans cet intervalle de temps.

d'où une durée caractéristique d'environ $\sqrt{L\delta}$

Énoncé: $\delta = 100 \text{ fs} \rightarrow \sqrt{2} \cdot 10^{-13} \text{ s}$

on a bien des impulsions $\sim \frac{10^{13}}{\sqrt{2}} \text{ Hz}$
cà d du térahertz.

26) $\lambda = c = c\delta\sqrt{2} = 4 \cdot 10^{-5} = 40 \mu\text{m}$

table 4 on lit $\alpha = 6000 \text{ cm}^{-1} = 6 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$
soit $\frac{1}{\alpha} = 1,7 \mu\text{m}$ donc $\lambda \gg \frac{1}{\alpha}$

32) $T_{e \rightarrow i} = \gamma (T_e - T_i)$ fait penser au

terme de conducto-convection mais il est ici volumique

33) L'énoncé donne $\alpha = -\frac{1}{I} \frac{dI}{dz}$ d'où

par intégration $I = I(t, z=0) e^{-\alpha z}$ intensité surfacique ou puissance surfacique tenant compte de la réflexion en $z=0$.

La puissance dégagée dans le volume Sdz est donc $(I(z) - I(z+dz)) S$

cà d $I(t) (e^{-\alpha z} - e^{-\alpha(z+dz)}) S$

soit $I(t) e^{-\alpha z} (1 - (1 - \alpha dz)) S$

soit $I(t) e^{-\alpha z} \alpha dz S = (1-R) I(t, z=0) e^{-\alpha z} \alpha dz S$

d'où la chaleur volumique dégagée par unité de temps $\frac{(1-R) I(t) \alpha e^{-\alpha z}}{S_0(t)}$

34) Bilan énergétique sur $[z; z+dz]$ par les électrons: pendant dt :

$$dz C_e dT_e = S_0(t) e^{-\alpha z} dz \tau dt + j_e(z) \tau dt - j_e(z+dz) \tau dt - T_{e \rightarrow i} \tau dz dt = \tau dz dt [S_0(t) e^{-\alpha z} + \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial z} - \gamma (T_e - T_i)]$$

Or $C_e dT_e = A_e T_e dT_e = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} A_e T_e^2) dt$
D'où $\frac{A_e \partial T_e^2}{2 \partial t} = S_0 e^{-\alpha z} + \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial z} - \gamma (T_e - T_i)$

Par les ions: $C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \gamma (T_e - T_i)$
(texte: κ_i négligeable, C_i constant)

35) Constantes de temps: $\frac{C_i}{\gamma} \quad \frac{A_e T_e}{\gamma} \quad \frac{A_e T_e}{\kappa_e}$

36) "diffusion ne s'effectue pas à l'échelle de la durée de l'impulsion" que j'ai noté d'où $\tau \ll \frac{A_e T_e L^2}{\kappa_e}$

"transfert e-ion ne s'effectue pas à l'échelle de la durée de l'impulsion" d'où $\tau \ll \frac{C_i}{\gamma}$ et $\tau \ll \frac{A_e T_e}{\gamma}$

"l'énergie transférée aux ions, sans que la diffusion soit notable" d'où $\frac{C_i}{\gamma} \ll \frac{A_e T_e L^2}{\kappa_e}$
conducto-convection e-ions diffusion

37) Cela simplifie les équations

$$\frac{A_e \partial T_e^2}{2 \partial t} = S_0(t) e^{-\alpha z} = (1-R) I(t) \alpha e^{-\alpha z}$$

Sur la durée τ $I(t) = I_0$

Intégrer / t: $\frac{A_e}{2} (T_e^2 - T_0^2) = (1-R) I_0 \alpha \tau e^{-\alpha z}$

avec $T_0 \ll T_e$ $T_e = \sqrt{\frac{2(1-R) I_0 \alpha \tau}{A_e} e^{-\alpha z}}$

avec $F_0 = I_0 \tau \rightarrow$ OK énoncé

38) Bilan total électrons-ions (on ajoute et on intègre:

$$\frac{A_e \partial T_e^2}{2 \partial t} + C_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = S_0 e^{-\alpha z} \quad (\text{diffusion négligée})$$

$$\downarrow \frac{1}{2} A_e T_e^2 + C_i T_i = (1-R) I_0 \alpha e^{-\alpha z} \tau \quad (T_0 \text{ négligé})$$

On lit table 3 $\frac{C_i}{A_e} = \frac{3,46 \times 10^6}{97}$

Même avec $T_f \sim 10^3 \text{ K}$ on aura $A_e T_f^2 \ll C_i T_f$

alors $T_i = \frac{(1-R) I_0 \alpha e^{-\alpha z} \tau}{C_i} = \alpha T_e^{-2} e^{-\alpha z}$

39) Pour sublimer le métal, il faut passer de T_f à T_{vap} en liquéfiant puis vaporisant

T_f devra être supérieur à T_{vap} pour vérifier $C_i (T_{vap} - T_f) + \Delta h_{liq} + \Delta h_{vap} = 0$

$$\Rightarrow \alpha F_a e^{-\alpha z} = C_i T_{vap} + \Delta h_{liq} + \Delta h_{vap}$$

$$z = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{c_i T_{\text{ray}} + \Delta h_{\text{ray}} + \Delta h_{\text{eq}}}{\Delta F_a}$$

$$z = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{F_a}{\frac{c_i T_{\text{ray}} + \Delta h_{\text{ray}} + \Delta h_{\text{eq}}}{\alpha}} \right) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{F_a}{F_{\text{th}}}$$

$$F_{\text{th}} = \frac{c_i T_{\text{ray}} + \Delta h_{\text{ray}} + \Delta h_{\text{eq}}}{\alpha}$$

$$F_{\text{th}} = \frac{3,46 \cdot 10^6 \cdot 2835 + 42,4 \cdot 10^9 + 1,80 \cdot 10^9}{6,3 \cdot 10^7}$$

$$F_{\text{th}} = 860 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$$

40) Temps caract. de diffusion, au caract

$$L \sim \frac{10}{\alpha}$$

$$\rightarrow \frac{A_e T_e L^2}{k_e} = \frac{97 \cdot 2800 \cdot 10^2}{6,3^2 \cdot 10^{14} \cdot 285} \sim 10^{-11}$$

Temps caract. échange : $\frac{c_e}{\gamma} = \frac{97 \cdot 2800}{10 \cdot 10^{16}} \sim 10^{-12} \text{ s}$

$$\frac{c_i}{\gamma} = \frac{3,46 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^{16}} \sim 10^{-11} \text{ s}$$

Durée impulsion $\tau = 150 \text{ fs} \sim 10^{-13} \text{ s}$

41) on vérifie $t_p \text{ diffusion} < t_p \text{ échange} < \tau$
mais ces temps restent proches
néanmoins.