

FORMULAIRE

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 2\pi\hbar = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante d'Avogadro	$N_a = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge de l'électron	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$

Valeurs numériques utiles

1 picoseconde	$1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$
1 femtoseconde	$1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$
1 attoseconde	$1 \text{ as} = 10^{-18} \text{ s}$
1 gigahertz	$1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$
1 térahertz	$1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$
1 électron-volt	$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$
unité de masse atomique (amu)	$1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Notations

On adopte la notation complexe $\mathcal{G}(t)$ pour toute grandeur $G(t)$ réelle dépendant du temps selon

$$G(t) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(t) + \mathcal{G}^*(t)) = \text{Re}(\mathcal{G}(t)).$$

Relations utiles

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Formule du double produit vectoriel pour $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \text{ et } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

Analyse vectorielle

Pour \vec{A} un champ de vecteur quelconque,

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}.$$

I. Quelques échelles de temps...

A. Dynamique moléculaire : états vibrationnels

Dans cette section, on considère le mouvement relatif de deux atomes d'une molécule diatomique. On adopte une description phénoménologique du potentiel d'interaction $V(\vec{r})$ entre ces deux atomes. Soit \vec{r} le vecteur position relative des deux atomes, de masse réduite notée μ . Une modélisation courante de la liaison covalente est constituée par le potentiel dit de Morse selon la loi suivante

$$V(\vec{r}) = D(1 - e^{-a(r-r_e)})^2,$$

où D et a sont deux constantes réelles positives, et $r = \|\vec{r}\|$.

Q1. Déterminer la position d'équilibre $r_{\text{éq}}$ de la liaison.

On considère les petits mouvements autour de la position d'équilibre ($r = r_{\text{éq}} + \varepsilon$, $\varepsilon \ll r_{\text{éq}}$).

Q2. Développer le potentiel $V(\vec{r})$ à l'ordre 2 en ε , et montrer que la force résultante est équivalente à un ressort de raideur k , dont on donnera l'expression. En déduire la fréquence angulaire ω_0 d'oscillation correspondante.

Q3. Tracer le potentiel de Morse et le potentiel harmonique approché en unité de D . Donner une interprétation physique de D .

En mécanique quantique, le confinement d'une particule résulte en une quantification des niveaux énergétiques accessibles. La liaison chimique correspondant au confinement de la particule fictive du problème à deux corps associé, l'énergie de vibration de la liaison est donc quantifiée. Dans le cas du potentiel de Morse, les valeurs propres de l'énergie sont associées à un nombre quantique noté v selon

$$E_v^{\text{Morse}} = \hbar\omega_0 \left(v + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\hbar\omega_0}{4D} \left(v + \frac{1}{2} \right) \right), \quad v \in \mathbb{N},$$

où ω_0 est la fréquence angulaire calculée dans la question précédente. Dans le cas d'un oscillateur harmonique, la quantification des énergies de vibration à la pulsation ω_0 s'exprime uniquement par le premier terme

$$E_v^{\text{osc. harm.}} = \hbar\omega_0 \left(v + \frac{1}{2} \right), \quad v \in \mathbb{N}.$$

Le second terme est alors un facteur correctif tenant compte des anharmonicités du potentiel.

On note $\Delta_v = E_{v+1} - E_v$, l'écart énergétique entre deux niveaux énergétiques vibrationnels successifs, et $E_{v_1 \rightarrow v_2}$ l'énergie associée à la transition d'un niveau v_1 vers un niveau v_2 .

Q4. Expliciter $E_{v_1 \rightarrow v_2}$ pour le potentiel de Morse et en déduire Δ_v dans le cas d'un potentiel harmonique, et dans le cas d'un potentiel de Morse. Commenter le comportement de l'écart énergétique avec v dans les deux cas.

Les techniques de spectroscopie moderne permettent d'accéder aux fréquences des transitions entre les différents niveaux énergétiques.

Q5. Exprimer, **sans approximation**, D et $\hbar\omega_0$ en fonction de $E_{0 \rightarrow 1}$ et $E_{0 \rightarrow 2}$.

En spectroscopie, on exprime usuellement les valeurs des transitions en *nombre d'onde* $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, où λ est la longueur d'onde associée. On note $\sigma_{v_1 \rightarrow v_2}$ le nombre d'onde associé à la transition d'un niveau v_1 vers un niveau v_2 . Pour la molécule HCl, on mesure $\sigma_{0 \rightarrow 1} = 2870 \text{ cm}^{-1}$, et $\sigma_{0 \rightarrow 2} = 5638 \text{ cm}^{-1}$.

Q6. Rappeler la relation entre la longueur d'onde λ et l'énergie E d'une transition donnée. Calculer les valeurs $\lambda_{0 \rightarrow 1}$ et $\lambda_{0 \rightarrow 2}$ associées à respectivement $E_{0 \rightarrow 1}$ et $E_{0 \rightarrow 2}$.

Q7. Calculer D et $f_0 = \omega_0/2\pi$ dans le cas de la molécule de HCl. En déduire les ordres de grandeurs typiques d'énergie et de temps mis en jeu dans les mouvements de vibrations atomiques au sein d'une molécule.

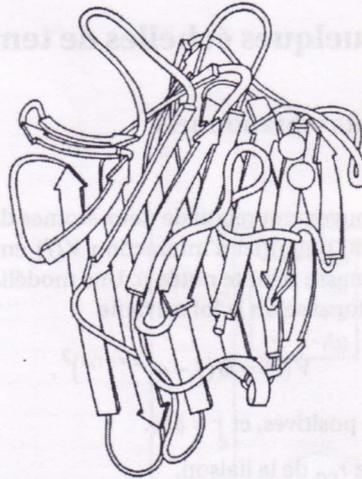


FIGURE 2 – Exemple de protéine constituée de feuillets β en conformation baril : la concanavoline A (représentation schématique)

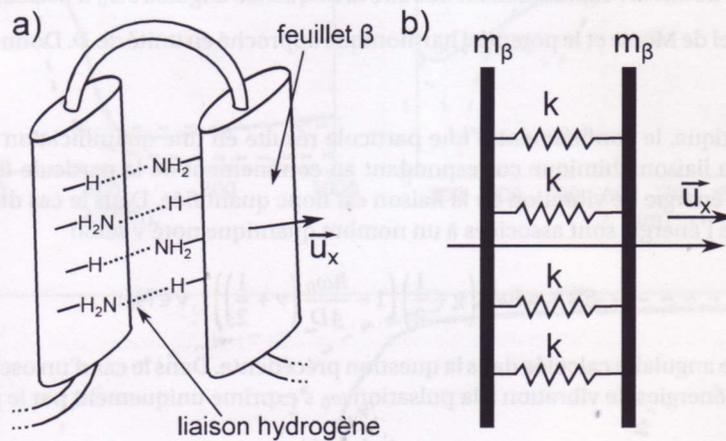


FIGURE 3 – a) Structure schématique de deux feuillets β , liés par $\lambda = 4$ liaisons hydrogènes. b) Modélisation mécanique équivalente.

B. Dynamique supramoléculaire : structure quaternaire d'une protéine

Une protéine est une macromolécule composée d'un assemblage d'acides aminés en chaîne, liés les uns aux autres par une liaison covalente dite peptidique. Lorsque la chaîne peptidique est suffisamment longue, les interactions internes à la molécule par liaisons hydrogènes donnent une conformation tridimensionnelle à la chaîne que l'on appelle structure ternaie. Les structures locales les plus courantes sont des structures en forme d'hélice (appelées *hélices- α*) et des structures en feuillets (appelées *feuillets- β*). Ces structures en hélices et en feuillets interagissent entre elles, toujours par liaisons hydrogènes, pour donner la structure tridimensionnelle finale à la protéine, appelée structure quaternaire.

La structure quaternaire d'une protéine joue un rôle fondamental dans sa fonctionnalité biologique, et donc les interactions entre feuillets β et hélices α sont de première importance. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier dans le cadre d'un modèle simple la dynamique de vibration d'une protéine afin d'en exhiber les échelles de temps et les énergies caractéristiques.

On considère une classe de protéines formées uniquement de feuillets β , en conformation "baril" : elle est formée de μ feuillets β répartis sur un cercle de rayon constant (voir Fig. 4.a)). Entre deux feuillets (supposés identiques, de masse m_β), on note λ le nombre de liaisons hydrogènes ($\lambda \in \mathbb{N}^*$). On modélise chaque liaison

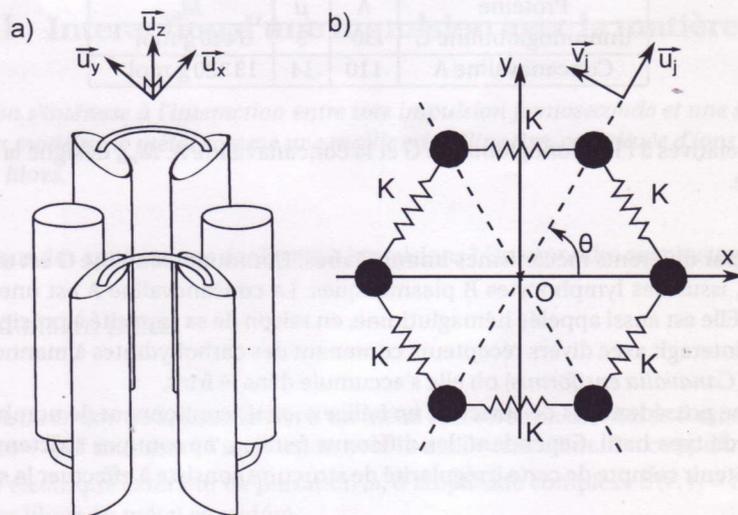


FIGURE 4 – a) Exemple de protéine en conformation baril à 6 feuillet β . b) Modélisation mécanique équivalente.

hydrogène par un ressort de raideur k (voir Fig. 3). On néglige la dynamique selon \vec{u}_z , et on assimile ainsi chaque feuillet à un point matériel ponctuel de masse m_β , se déplaçant dans le plan Oxy . Chaque feuillet est lié élastiquement à ses deux plus proches voisins par un ressort de raideur $K = \lambda k$ (voir Fig. 4.b)). Les feuillet sont équirépartis sur un cercle de centre O . On associe l'indice j à toutes les grandeurs physiques du $j^{\text{ème}}$ feuillet, ainsi qu'une base orthonormée locale (\vec{u}_j, \vec{v}_j) . Par convention, le feuillet $j = 1$ est celui situé sur l'axe des x , avec une abscisse positive. On note $\theta = \frac{2\pi}{\mu}$, que l'on suppose **suffisamment faible pour approximer** $\cos \theta \approx 1$. On note $\vec{d}_j(t)$ le déplacement instantané du feuillet m_j **par rapport à sa position d'équilibre**.

Q8. Montrer que l'interaction de λ liaisons hydrogènes est équivalente à un ressort unique de raideur $K = \lambda k$.

Q9. Établir l'équation vectorielle du mouvement du déplacement $\vec{d}_j(t)$ en fonction de m_β , K et des $\vec{d}_i(t)$.

On cherche des solutions orthoradiales, de la forme $\vec{d}_j(t) = \zeta_j(t) \vec{v}_j$.

Q10. En déduire l'équation régissant $\zeta_j(t)$.

On cherche les modes propres solutions du système, c'est-à-dire les solutions oscillantes de la forme

$$\zeta_j(t) = z_j \cos \omega t, \quad j \in \{1, 2, \dots, \mu - 1, \mu\}.$$

Q11. Déterminer le système linéaire de μ équations vérifié par les $\{z_j\}$. À quelle condition ce système possède-t-il une solution non triviale? Combien, au maximum, de pulsations ω peuvent satisfaire ces conditions?

On propose de tester une famille de p solutions (appelées *modes*) de la forme

$$\zeta_j^{(p)}(t) = A_p \sin(j\phi_p) \cos \omega_p t, \quad p \in \{1, 2, \dots, \mu - 2, \mu - 1\}.$$

Q12. Établir une relation entre ϕ_p et ω_p , la pulsation du mode p considéré.

Q13. En exploitant la symétrie de révolution du système selon l'axe z , expliciter ϕ_p et confirmer le nombre de modes obtenus en **Q11**.

Q14. En déduire l'expression de ω_p , ainsi que ω_{\min} et ω_{\max} , les fréquences angulaires minimale et maximale associées à la dynamique du système. On exprimera ces grandeurs en fonction des paramètres k , λ , μ , m_β .

L'immunoglobuline G est le principal type d'anticorps trouvé dans le sang et dans le liquide interstitiel. Il permet de contrôler les infections des tissus du corps. Il se lie à divers types de pathogènes afin de protéger le corps

Protéine	Λ	μ	M_{mol}
Immunoglobuline G	50	9	$6440 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Concanavoline A	110	14	$13320 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

TABLE 5 – Données relatives à l'immunoglobuline G et la concanavoline A. M_{mol} désigne la masse **molaire** de la molécule considérée.

contre ces derniers, par différents mécanismes immunitaires. L'immunoglobuline G est une protéine sécrétée par les plasmocytes, issus des lymphocytes B plasmatisques. La concanavoline A est une glycoprotéine de la famille des lectines. Elle est aussi appelée hémagglutinine, en raison de sa capacité à précipiter les érythrocytes. La concanavoline A interagit avec divers récepteurs contenant des carbohydrates à mannose. Elle est produite par le haricot sabre (*Canavalia ensiformis*) où elle s'accumule dans le fruit.

Ces deux protéines ne possèdent pas de structure en hélice α , mais contiennent de nombreux feuilletts β dont la conformation est de type baril. Cependant, les différents feuilletts ne sont pas strictement identiques. Une approximation pour tenir compte de cette irrégularité de structure consiste à effectuer la substitution suivante

$$\frac{\lambda}{m_{\beta}} \rightarrow \frac{\Lambda}{M},$$

où Λ est le nombre total de liaisons hydrogène et M la masse totale de la structure en feuillet β considérée. On donne les valeurs numériques correspondant à ces deux protéines dans la table 5. On donne également la constante de raideur élastique d'une liaison hydrogène dans un feuillet β , $k \approx 13 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Q15. Application numérique : calculer la fréquence du mode de vibration le plus lent, et en déduire l'échelle de temps caractéristique du mouvement conformationnel de la structure quaternaire d'une protéine. Les techniques de spectroscopie montrent une raie d'absorption large à 28 cm^{-1} pour l'immunoglobuline G et à 20 cm^{-1} pour la concanavoline A. Commenter.

1) $\frac{dV}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = r_0$

2) Développement limite par $r \rightarrow r_0$

$$V(r) \approx D \left(1 - (1 - a(r-r_0) + \frac{a^2}{2}(r-r_0)^2) \right)^2$$

$$\approx Da (r-r_0)^2$$

Équivalent au potentiel d'un ressort

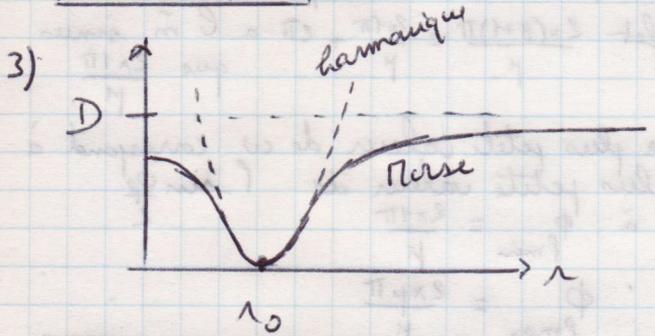
$$V_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} k (r-r_0)^2$$

Raideur équivalente $k = 2Da$

Pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ici le système des 2 atomes a une masse "réduite" μ .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2Da}{\mu}}$$



D est l'énergie de dissociation de la molécule

$$4) E_{v_1 \rightarrow v_2} = \hbar\omega_0 \left(v_2 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\hbar\omega_0}{4D} \left(v_2 + \frac{1}{2} \right) \right) - \hbar\omega_0 \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\hbar\omega_0}{4D} \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$E_{v_1 \rightarrow v_2} = \hbar\omega_0 (v_2 - v_1) - \left(\frac{\hbar\omega_0}{4D} \right)^2 \left((v_2 + \frac{1}{2})^2 - (v_1 + \frac{1}{2})^2 \right)$$

$$E_{v_1 \rightarrow v_2} = \hbar\omega_0 (v_2 - v_1) - \frac{(\hbar\omega_0)^2}{4D} (v_2 - v_1)(v_2 + v_1 + 1)$$

$$\Delta_v = E_{v \rightarrow v+1} = \hbar\omega_0 - \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2D} (v+1)$$

par le potentiel de Morse

Par le potentiel harmonique, on aurait

$$\Delta_v^{\text{harm}} = \hbar\omega_0$$

Cas harmonique : l'écart est constant
 Cas Morse : l'écart décroît linéairement avec v

5) $E_{0 \rightarrow 1} = \hbar\omega_0 (1-0) - \frac{(\hbar\omega_0)^2}{4D} ((1-0)(1+0))$ (1)

$$E_{0 \rightarrow 2} = \hbar\omega_0 (2-0) - \frac{(\hbar\omega_0)^2}{4D} ((2-0)(2+0))$$

soit (a) $E_{0 \rightarrow 1} = \hbar\omega_0 - \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2D}$ (b) $E_{0 \rightarrow 2} = 2\hbar\omega_0 - \frac{3(\hbar\omega_0)^2}{2D}$

Faire 3(a)-(b) : $3E_{0 \rightarrow 1} - E_{0 \rightarrow 2} = \hbar\omega_0$

d'où $\hbar\omega_0 = 3E_{0 \rightarrow 1} - E_{0 \rightarrow 2}$

Remplacer ds (a) : $D = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2(\hbar\omega_0 - E_{0 \rightarrow 1})}$

$$D = \frac{(3E_{0 \rightarrow 1} - E_{0 \rightarrow 2})^2}{2(3E_{0 \rightarrow 1} - E_{0 \rightarrow 2})}$$

6) $E = \frac{hc}{\lambda}$ $\lambda_{0 \rightarrow 1} = \frac{hc}{E_{0 \rightarrow 1}}$ $\lambda_{0 \rightarrow 2} = \frac{hc}{E_{0 \rightarrow 2}}$

$$\lambda_{0 \rightarrow 1} = \frac{1}{\sigma_{0 \rightarrow 1}} = \frac{1}{2870} \text{ cm} \approx 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\lambda_{0 \rightarrow 2} = \frac{1}{\sigma_{0 \rightarrow 2}} = \frac{1}{5638} \text{ cm} \approx 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

7) $E_{0 \rightarrow 1} = hc\sigma_{0 \rightarrow 1} = 6,64 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 \times 2870 \times 10^2$

$$E_{0 \rightarrow 2} = hc\sigma_{0 \rightarrow 2} = E_{0 \rightarrow 1} \frac{5638}{2870}$$

En eV $E_{0 \rightarrow 1} = \frac{6,6 \times 3 \times 2,87 \times 10^{-21}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sim 10^{-1} \text{ eV}$

$$\hbar\omega_0 = 3E_{0 \rightarrow 1} - E_{0 \rightarrow 2} = 3 \frac{hc}{\lambda_{0 \rightarrow 1}} - \frac{hc}{\lambda_{0 \rightarrow 2}}$$

$$f_0 = (3\sigma_{0 \rightarrow 1} - \sigma_{0 \rightarrow 2}) c = (3(2870) - 5638) 3 \cdot 10^8$$

$$f_0 = 9 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

$$D = \frac{(3hc\sigma_{0 \rightarrow 1} - hc\sigma_{0 \rightarrow 2})^2}{2(2hc\sigma_{0 \rightarrow 1} - hc\sigma_{0 \rightarrow 2})} = \frac{hc(3\sigma_{0 \rightarrow 1} - \sigma_{0 \rightarrow 2})^2}{2(2\sigma_{0 \rightarrow 1} - \sigma_{0 \rightarrow 2})}$$

$$D = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 (3 \times 2870 - 5638)^2 \cdot 10^2}{2 (2 \times 2870 - 5638)}$$

$$D = 8,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 5 \text{ eV}$$

Durée $\sim \frac{1}{f_0} \sim \frac{1}{10^{14}} \sim 10^{-14} \text{ s}$

8) 2 ressorts en parallèle : on ajoute les raideurs

En effet les 2 ressorts subissent tous le même allongement Δx avec le même force chacun : $f = k \Delta x$
L'ensemble est équivalent à un ressort unique subissant la force λf pour le même allongement Δx .
 $\lambda f = K \Delta x$ d'où $\lambda = \frac{K}{k}$

$$K = \lambda k \quad (\text{OK})$$

$$9) \left[m_p \ddot{d}_j = -K(d_j - d_{j-1}) + K(d_{j+1} - d_j) \right]$$

10) Si on envisage des déplacements orthoradiaux suffisamment petits avec θ suffisamment faible, alors on obtient la même équation en scalaire

$$\left[m_p \ddot{d}_j = -K(d_j - d_{j-1}) + K(d_{j+1} - d_j) \right]$$

11) Injecter d_j proposée = $z_j \cos \omega t$

$$-m_p \omega^2 z_j = -K(z_j - z_{j-1}) + K(z_{j+1} - z_j)$$

$$\Downarrow (2K - m_p \omega^2) z_j = K z_{j+1} + K z_{j-1}$$

ça donnerait ce genre de système :

$$\begin{aligned} j=1 & -Kz_0 + (\quad) z_1 - Kz_2 = 0 \\ j=2 & -Kz_1 + (\quad) z_2 - Kz_3 = 0 \\ j=3 & -Kz_2 + (\quad) z_3 - Kz_4 = 0 \\ j=4 & -Kz_3 + (\quad) z_4 - Kz_5 = 0 \end{aligned}$$

Rq z_5 correspond à z_1 (si on a 4 atomes) et z_0 à z_4

On a donc 4 équations à 4 inconnues. Dans le cas général, μ équations à μ inconnues. La solution non nulle correspond à un déterminant nul.

Il contiendra $\mu (2K - m_p \omega^2)$ à multiplier entre elles d'où un polynôme en ω^2 de degré μ .

Il y aura donc au plus μ solutions ω^2 donc aussi μ solutions ω (car $\omega > 0$)

$$12) -m_p A \sin(j\phi_p) \omega_p^2 = -K(A \sin(j\phi_p) - A \sin(j-1)\phi_p) + K(A \sin(j+1)\phi_p - A \sin(j\phi_p))$$

$$\text{soit } -m_p \omega_p^2 \sin(j\phi_p) = 2K \left(-\frac{\sin \phi_p \cos(j-1)\phi_p}{2} + \frac{\sin \phi_p \cos(j+1)\phi_p}{2} \right)$$

$$\text{en utilisant } \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \quad (2)$$

$$\text{puis avec } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$-m_p \omega_p^2 \sin j\phi_p = 2K \sin \frac{\phi_p}{2} \left[-2 \sin \phi_p \frac{\sin j\phi_p}{2} \right]$$

$$\text{qui se simplifie en } \boxed{m_p \omega_p^2 = 4K \sin^2 \frac{\phi_p}{2}}$$

13) Il faut que $f_{\mu+1} = f_1$ puisque le $(\mu+1)^{\text{ième}}$ oscillateur est aussi le 1^{er};

$$\text{donc } \sin(\mu+1)\phi_p = \sin \phi_p$$

$$\text{soit } (\mu+1)\phi_p = \phi_p + 2k\pi \quad k \text{ entier}$$

$$\text{d'où } \mu\phi_p = 2k\pi \quad k \text{ entier d'où la série}$$

$$\frac{2 \times 1\pi}{\mu} \quad \frac{2 \times 2\pi}{\mu} \quad \frac{2 \times 3\pi}{\mu} \quad \dots \quad \frac{2 \times \mu\pi}{\mu} \quad \mu \text{ solutions}$$

$$\text{en effet } \frac{2 \times (\mu+1)\pi}{\mu} = \frac{2 \times 1\pi}{\mu} + 2\pi \text{ a le m même sinus que } \frac{2 \times 1\pi}{\mu}$$

14) La plus petite valeur de ω correspond à la plus petite valeur de $\sin \frac{\phi_p}{2}$

$$\text{donc à } \phi_{p \min} = \frac{2 \times 1\pi}{\mu}$$

$$\text{De m } \phi_{p \max} = \frac{2 \times \mu\pi}{\mu}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\omega_{p \min} = 2 \sqrt{\frac{K}{m_p}} \frac{\sin \frac{\pi}{\mu}}{\mu} \quad \text{et } \omega_{p \max} = 2 \sqrt{\frac{K}{m_p}}}$$

$$\text{avec } K = \lambda k$$

$$15) f_{p \min} = \frac{\omega_{p \min}}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda k}{m_p}} \frac{\sin \frac{\pi}{\mu}}{\mu} \rightarrow \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda k}{m_p}} \frac{\sin \frac{\pi}{\mu}}{\mu}$$

$$\text{Immunoglobine G : } f_{p \min} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{50 \times 13}{6,44}} \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{9} = 8,5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$\text{Concanavaline A : } f_{p \min} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{110 \times 6,02 \times 10^{13} \times 13}{13,32}} \frac{\sin \frac{\pi}{14}}{14} = 5,7 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Les durées caractéristiques sont $\tau = \frac{1}{f} = 10^{-12}$

$$\text{Immunoglobine G : } \frac{1}{\lambda} = 28 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 28 \times 10^8 \times 3 \cdot 10^8 = 8,4 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\text{Concanavaline A : } \frac{1}{\lambda} = 20 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 20 \times 10^8 \times 3 \cdot 10^8 = 6 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

Les raies d'absorption correspondent avec une bonne précision